

第3章 | 2次関数



第1節 2次関数とグラフ

1 関数とグラフ

A 関数

まとめ

1 関数

2つの変数 x , y について, x の値を決めるとそれに応じて y の値がただ1つ定まるとき, y は x の関数であるという。

2 1次関数

y が x の1次式で表されるとき, y は x の1次関数であるという。一般形は $y = ax + b$ ただし, $a \neq 0$

3 2次関数

y が x の2次式で表されるとき, y は x の2次関数であるという。一般形は $y = ax^2 + bx + c$ ただし, $a \neq 0$

4 関数 $f(x)$

y が x の関数であるとき, y を表す x の式を $f(x)$, $g(x)$ のように書くことがある。 x の関数 $y = f(x)$ を単に, 関数 $f(x)$ ともいう。 $x = a$ のときの関数 $f(x)$ の値を $f(a)$ で表す。

5 定義域・値域

y が x の関数であるとき, 変数 x のとりうる値の範囲を, その関数の定義域という。また, 定義域の x の値に対応して y がとる値の範囲を値域という。
 y が x の関数であるとき, 断りがなければ, その定義域は y の値が定まるような x の値全体であるとする。

教 p.75

練習
1

2次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ において, 次の値を求めよ。

- (1) $f(3)$ (2) $f(-1)$ (3) $f(-a)$ (4) $f(a+1)$

指針 関数 $f(x)$ の値 $f(x)$ について, $f(k)$ の値とは $x = k$ のときの $f(x)$ の値である。 $f(x)$ の式で, x に k を代入したもので, それを計算すると $f(k)$ の値が求められる。たとえば, $f(3)$ の値は, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ の式に, $x = 3$ を代入して計算すればよい。

- 解答 (1) $f(3)=3^2-2\cdot 3+1$
 $=9-6+1=4$ 答
- (2) $f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)+1$
 $=1+2+1=4$ 答
- (3) $f(-a)=(-a)^2-2(-a)+1$
 $=a^2+2a+1$ 答
- (4) $f(a+1)=(a+1)^2-2(a+1)+1$
 $=a^2+2a+1-2a-2+1$
 $=a^2$ 答

教 p.75

練習
2

底辺の長さが 4 cm, 高さが x cm の三角形の面積を y cm² とする。
 ただし, 高さは 4 cm 以上であるとする。 y を x の式で表せ。

指針 関数と定義域 三角形の面積を求める公式にあてはめて y を x の式で表す。
 定義域を示すのを忘れないようにする。

解答 $y=\frac{1}{2}\times 4\times x=2x$

高さは 4 cm 以上であるから, 定義域は $x\geq 4$ である。

答 $y=2x$ ($x\geq 4$)

B 関数のグラフ

まとめ

1 原点と座標軸

平面上に, 点Oで垂直に交わる2本の数直線を取り, それらを x 軸と y 軸とする。点Oを原点といい, x 軸と y 軸を座標軸という。

2 座標

平面上に座標軸を定めると, 平面上の点Pの位置は, 2つの実数の組 (a, b) で表される。この組 (a, b) を点Pの座標といい, このような点Pを $P(a, b)$ と書く。

また, 座標が (a, b) である点を, 単に点 (a, b) ということがある。

3 座標平面

座標を定めた平面を座標平面という。

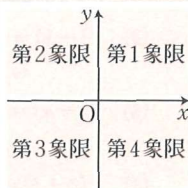
4 直線 $y=ax+b$

関数 $y=f(x)$ を座標平面上の図形として表したものがグラフである。1次関数 $y=ax+b$ のグラフは, 傾きが a , 切片が b の直線である。1次関数 $y=ax+b$ のグラフを, 直線 $y=ax+b$ ということもある。また, $y=ax+b$ をこの直線の方程式という。

1 象限

座標平面は座標軸によって4つの部分に分けられる。これらの各部分を象限しやうげんといい、右の図のように、それぞれを第1象限、第2象限、第3象限、第4象限という。

座標軸はどの象限にも含めない。

2 関数 $y=f(x)$ のグラフ

関数 $y=f(x)$ のグラフとは、関数 $y=f(x)$ を満たすような点 $(x, f(x))$ 全体で作られる図形のことである。

3 関数の最大値

関数の値域に最大の値があるとき、その値を関数の最大値という。

関数の最小値

関数の値域に最小の値があるとき、その値を関数の最小値という。

注意 関数の最大値や最小値は、必ずあるとは限らない。

練習
3

次の点はどの象限にあるか。

(1) $A(2, 3)$

(2) $B(2, -3)$

(3) $C(-2, 3)$

(4) $D(-2, -3)$

指針 座標平面上の点と象限 点 (a, b) が

$a > 0, b > 0$ なら第1象限

$a < 0, b > 0$ なら第2象限

$a < 0, b < 0$ なら第3象限

$a > 0, b < 0$ なら第4象限

にある。

解答 (1) 第1象限 **答** (2) 第4象限 **答**

(3) 第2象限 **答** (4) 第3象限 **答**

■
 深
 め
 る

教 p.76

そのグラフが点 $(2, 5)$ を通る1次関数を1つ選び、 $y=ax+b$ の形で表してみよう。また、そのグラフは点 $(-1, -1)$ を通るだろうか。

指針 関数 $y=f(x)$ のグラフが点 (p, q) を通るとき $q=f(p)$ が成り立つ。

解答 点 (2, 5) を通る 1 次関数 $y=ax+b$ のグラフにおいて

$$5=a \cdot 2+b, \quad \text{すなわち} \quad 2a+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

よって、たとえば $a=1$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $b=3$ となるから、1 次関数

$y=x+3$ のグラフは点 (2, 5) を通る。 **答** $y=x+3$

また、 $y=x+3$ において、 $x=-1$ とおくと $y=2$ であるから、1 次関数

$y=x+3$ のグラフは点 (-1, -1) は通らない。 **答**

補足 $y=ax+b$ において $x=-1$, $y=-1$ とおくと、 $-1=a \cdot (-1)+b$ から

$$a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ゆえに、解答の $\textcircled{1}$ と、上の $\textcircled{2}$ を a, b について解いて $a=2, b=1$

よって、1 次関数 $y=2x+1$ のグラフなら、2 点 (2, 5), (-1, -1) を通る。

練習
4

次の関数のグラフをかけ。また、関数の値域を求めよ。

(1) $y=3x-2 \quad (0 \leq x \leq 3)$

(2) $y=-2x+4 \quad (-2 \leq x \leq 2)$

教 p.77

指針 1 次関数 $y=ax+b$ のグラフ 関数のグラフをかいて、その値域を求める。

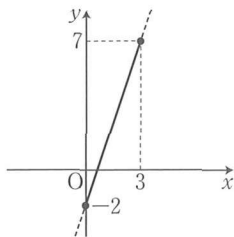
解答 (1) この関数のグラフは、 $y=3x-2$ のグラフのうち、 $0 \leq x \leq 3$ に対応する部分である。

$$x=0 \text{ のとき} \quad y=-2$$

$$x=3 \text{ のとき} \quad y=7$$

ゆえに、グラフは右の図の実線部分である。

よって、関数の値域は $-2 \leq y \leq 7$ **答**



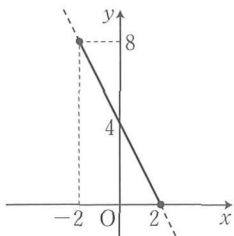
(2) この関数のグラフは、 $y=-2x+4$ のグラフのうち、 $-2 \leq x \leq 2$ に対応する部分である。

$$x=-2 \text{ のとき} \quad y=-2 \cdot (-2)+4=8$$

$$x=2 \text{ のとき} \quad y=-2 \cdot 2+4=0$$

ゆえに、グラフは右の図の実線部分である。

よって、関数の値域は $0 \leq y \leq 8$ **答**



練習
5

次の関数の値域を求めよ。また、関数の最大値、最小値を求めよ。

(1) $y=2x-1$ ($-1 \leq x \leq 2$)

(2) $y=-3x+5$ ($0 \leq x \leq 3$)

指針 関数の最大値、最小値 関数のグラフが右上がりのときは、 x が最大のとき y は最大値をとる。関数のグラフが右下がりのときは、 x が最小のとき y は最大値をとる。

解答 (1) この関数のグラフは右の図のようになる。

$x=-1$ のとき $y=-3$

$x=2$ のとき $y=3$

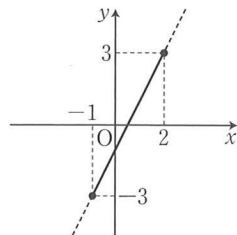
よって、関数の値域は $-3 \leq y \leq 3$ **答**

また、関数は

$x=2$ で最大値 3,

$x=-1$ で最小値 -3

をとる。 **答**



(2) この関数のグラフは右の図のようになる。

$x=0$ のとき $y=5$

$x=3$ のとき $y=-4$

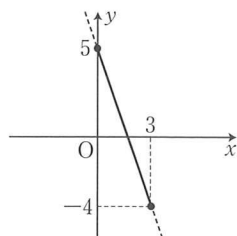
よって、関数の値域は $-4 \leq y \leq 5$ **答**

また、関数は

$x=0$ で最大値 5,

$x=3$ で最小値 -4

をとる。 **答**



2 2次関数のグラフ

A 2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

1 放物線

2次関数 $y=ax^2$ のグラフの形の曲線を放物線という。放物線は限りなくのびており、また対称の軸をもつ。この軸を放物線の軸といい、放物線とその軸の交点を放物線の頂点という。

2 2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2$ のグラフは放物線である。その軸は y 軸、頂点は原点である。

$a>0$ のとき、下に凸(上に開いている)

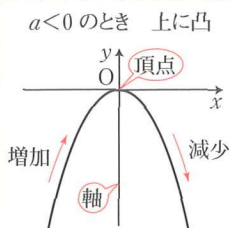
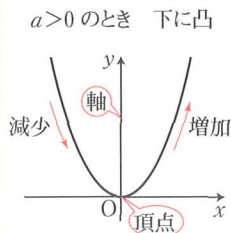
$a<0$ のとき、上に凸(下に開いている)

3 $y=ax^2$ の y の値の変化

$a>0$ のとき、 $x=0$ の前後で減少から増加に変わる。

$a<0$ のとき、 $x=0$ の前後で増加から減少に変わる。

まとめ



3章

2次関数

練習 6

次の2次関数のグラフをかけ。また、その放物線は上に凸、下に凸のどちらであるか。

- (1) $y=3x^2$ (2) $y=-3x^2$ (3) $y=\frac{1}{3}x^2$

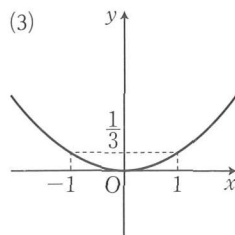
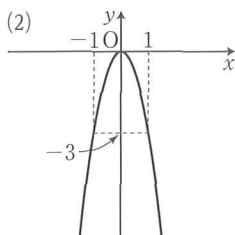
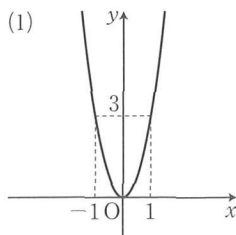
教 p.79

指針 $y=ax^2$ のグラフ 頂点が原点、軸が y 軸で、 $a>0$ のときは、上に開いた放物線、 $a<0$ のときは、下に開いた放物線になる。

解答 (1) グラフは下の図(1)。下に凸 答

(2) グラフは下の図(2)。上に凸 答

(3) グラフは下の図(3)。下に凸 答



B 2 次関数 $y=ax^2+q$ のグラフ

まとめ

1 平行移動

平面上で、図形上の各点を一定の向きに一定の距離だけ動かす移動を、平行移動という。

2 $y=ax^2+q$ のグラフ

2 次関数 $y=ax^2+q$ のグラフは、 $y=ax^2$ のグラフを、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。その軸は y 軸、頂点は点 $(0, q)$ である。

練習
7

教 p.80

次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=x^2+3$

(2) $y=2x^2-1$

(3) $y=-x^2+2$

指針 $y=ax^2+q$ のグラフ $y=ax^2+q$ のグラフは、 $a>0$ のとき下に凸 (上に開いている)、 $a<0$ のとき上に凸 (下に開いている) の放物線になる。点 $(0, q)$ を頂点として、 $y=ax^2$ と同じ形の放物線をかく。

解答 (1) グラフは下の図 (1)。

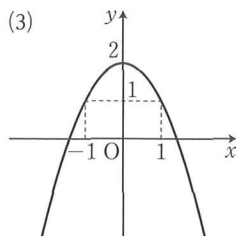
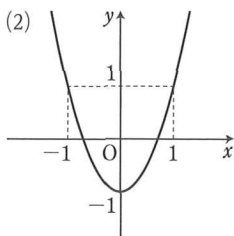
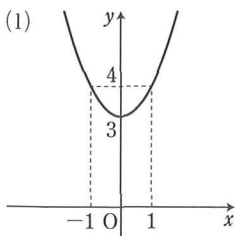
軸は y 軸、頂点は点 $(0, 3)$ 答

(2) グラフは下の図 (2)。

軸は y 軸、頂点は点 $(0, -1)$ 答

(3) グラフは下の図 (3)。

軸は y 軸、頂点は点 $(0, 2)$ 答



C 2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフ

まとめ

 $y=a(x-p)^2$ のグラフ

2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは、 $y=ax^2$ のグラフを、 x 軸方向に p だけ平行移動した放物線である。

その軸は直線 $x=p$ 、頂点は点 $(p, 0)$ である。

注意 点 $(p, 0)$ を通り y 軸に平行な直線を、直線 $x=p$ という。

3 章

2 次関数

教 p.81

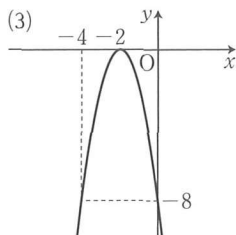
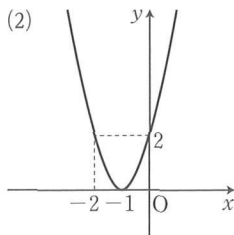
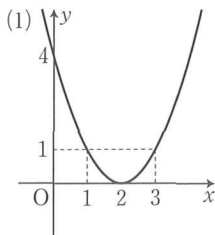
練習
8

次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

- (1) $y=(x-2)^2$ (2) $y=2(x+1)^2$ (3) $y=-2(x+2)^2$

指針 $y=a(x-p)^2$ のグラフ 頂点 $(p, 0)$ を原点、軸の直線 $x=p$ を y 軸とみて、 $y=ax^2$ のグラフをかけばよい。

- 解答** (1) グラフは下の 図(1)。軸は直線 $x=2$ 、頂点は点 $(2, 0)$ 答
 (2) グラフは下の 図(2)。軸は直線 $x=-1$ 、頂点は点 $(-1, 0)$ 答
 (3) グラフは下の 図(3)。軸は直線 $x=-2$ 、頂点は点 $(-2, 0)$ 答

D 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

まとめ

 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは、 $y=ax^2$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。その軸は直線 $x=p$ 、頂点は点 (p, q) である。

注意 次のようにいうこともできる。

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると、 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフになる。

練習
9

次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = (x-1)^2 + 2$

(2) $y = 2(x-2)^2 - 4$

(3) $y = -2(x+1)^2 + 2$

(4) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

指針 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ 2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したもので、軸が直線 $x = p$ 、頂点が点 (p, q) の放物線である。よって、頂点 (p, q) を原点、軸の直線 $x = p$ を y 軸とみて、 $y = ax^2$ のグラフをかく。

解答 (1) グラフは下の図(1)。

軸は直線 $x = 1$ 、頂点は点 $(1, 2)$ 答

(2) グラフは下の図(2)。

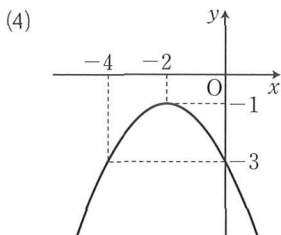
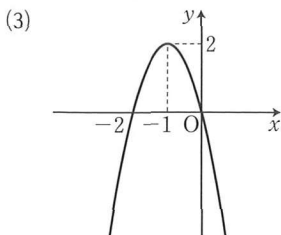
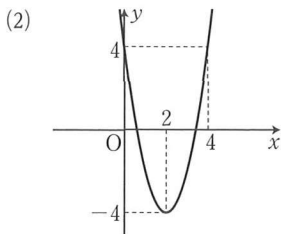
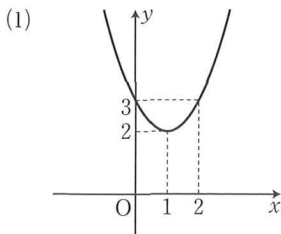
軸は直線 $x = 2$ 、頂点は点 $(2, -4)$ 答

(3) グラフは下の図(3)。

軸は直線 $x = -1$ 、頂点は点 $(-1, 2)$ 答

(4) グラフは下の図(4)。

軸は直線 $x = -2$ 、頂点は点 $(-2, -1)$ 答



E 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

まとめ

平方完成

 $a(x+\quad)^2+\circ$ の形の2次式に変形することを、平方完成という。

$$x^2+\quad x=\left(x+\frac{\quad}{2}\right)^2-\left(\frac{\quad}{2}\right)^2$$

平方完成することで、そのグラフの頂点と軸がわかる。

3章

2次関数

練習
10

教 p.83

次の2次式を平方完成せよ。

(1) x^2+8x

(2) x^2-6x+8

(3) $2x^2-8x+5$

(4) $3x^2+6x+2$

(5) x^2+x-2

(6) $-2x^2+6x+4$

指針 平方完成 平方完成は次のような変形をする。

$$x^2+\quad x=\left(x+\frac{\quad}{2}\right)^2-\left(\frac{\quad}{2}\right)^2$$

↑ 2乗
↑ 半分

解答 (1) $x^2+8x=(x+4)^2-4^2$

$$=(x+4)^2-16 \quad \text{答}$$

(2) $x^2-6x+8=(x-3)^2-3^2+8$

$$=(x-3)^2-1 \quad \text{答}$$

(3) $2x^2-8x+5=2(x^2-4x)+5=2\{(x-2)^2-2^2\}+5$

$$=2(x-2)^2-2\cdot 4+5$$

$$=2(x-2)^2-3 \quad \text{答}$$

(4) $3x^2+6x+2=3(x^2+2x)+2=3\{(x+1)^2-1^2\}+2$

$$=3(x+1)^2-3\cdot 1+2$$

$$=3(x+1)^2-1 \quad \text{答}$$

(5) $x^2+x-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \quad \text{答}$$

(6) $-2x^2+6x+4=-2(x^2-3x)+4=-2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+4$

$$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{9}{4}+4$$

$$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2} \quad \text{答}$$

1 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

1 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは、 $y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線である。

2つの放物線 $y=ax^2+bx+c$, $y=ax^2+b'x+c'$ は x^2 の係数がともに a であるから、一方を平行移動して他方に重ねることができる。

2 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ と変形できるから

放物線の軸は直線 $x=-\frac{b}{2a}$, 頂点は点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

2 放物線 $y=ax^2+bx+c$

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを、放物線 $y=ax^2+bx+c$ ともいう。

また、 $y=ax^2+bx+c$ をこの放物線の方程式という。

練習
11

教 p.84

次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=x^2-4x+3$

(2) $y=2x^2+8x+3$

(3) $y=-3x^2+6x+1$

(4) $y=-x^2-3x$

指針 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフをかくには、 $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形すればよい。 $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した放物線になることがわかるから、頂点、軸を基準にして放物線 $y=ax^2$ をかく。

解答 (1) $x^2-4x+3=(x-2)^2-2^2+3$
 $= (x-2)^2-1$

よって $y=(x-2)^2-1$

グラフは次ページの図(1)。

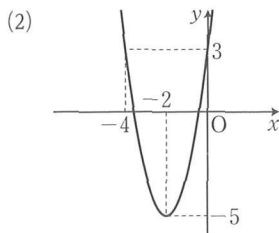
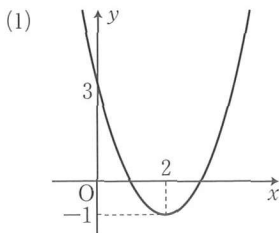
軸は直線 $x=2$, 頂点は点 $(2, -1)$ 答

(2) $2x^2+8x+3=2(x^2+4x)+3=2\{(x+2)^2-2^2\}+3$
 $=2(x+2)^2-2\cdot4+3$
 $=2(x+2)^2-5$

よって $y=2(x+2)^2-5$

グラフは次ページの図(2)。

軸は直線 $x=-2$, 頂点は点 $(-2, -5)$ 答



$$\begin{aligned}
 (3) \quad -3x^2 + 6x + 1 &= -3(x^2 - 2x) + 1 = -3\{(x-1)^2 - 1^2\} + 1 \\
 &= -3(x-1)^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
 &= -3(x-1)^2 + 4
 \end{aligned}$$

よって $y = -3(x-1)^2 + 4$

グラフは下の図(3)。

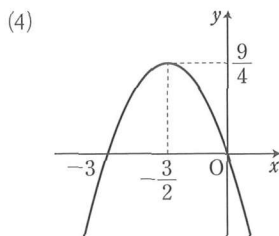
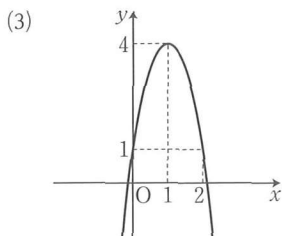
軸は直線 $x=1$ ，頂点は点 $(1, 4)$ 答

$$\begin{aligned}
 (4) \quad -x^2 - 3x &= -(x^2 + 3x) = -\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} \\
 &= -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

よって $y = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

グラフは下の図(4)。

軸は直線 $x = -\frac{3}{2}$ ，頂点は点 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 答



そのグラフが点 $(2, 5)$ を通る 2 次関数を 1 つ選び、 $y = ax^2 + bx + c$ の形で表してみよう。また、そのグラフは点 $(-1, -1)$ を通るだろうか。

指針 関数 $y = f(x)$ のグラフが点 (p, q) を通るとき $q = f(p)$ が成り立つ。

解答 点 $(2, 5)$ を通る 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフにおいて

$$5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad \text{すなわち} \quad 4a + 2b + c = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

よって、たとえば $a=1, b=1$ のとき、①より $c=-1$ となるから、2 次関数 $y=x^2+x-1$ のグラフは点 $(2, 5)$ を通る。 **答** $y=x^2+x-1$

また、 $y=x^2+x-1$ において、 $x=-1$ とおくと $y=-1$ であるから、2 次関数 $y=x^2+x-1$ のグラフは点 $(-1, -1)$ を通る。 **答**

補足 $y=ax^2+bx+c$ において $x=-1, y=-1$ とおくと、
 $-1=a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$ から $a-b+c=-1 \dots\dots ②$

ゆえに、解答の①と上の②から、 c を消去して $b=2-a$

これを②に代入して $c=1-2a$

よって、 $a \neq 0$ から、2 次関数 $y=ax^2+(2-a)x+1-2a$ のグラフは、2 点 $(2, 5), (-1, -1)$ を通る。上で示した 2 次関数 $y=x^2+x-1$ は、 $a=1$ の場合である。

このように、2 点 $(2, 5), (-1, -1)$ を通るグラフは、1 次関数ならただ 1 つに決まるが (96 ページの「深める」参照)、2 次関数なら無数に存在する。

教 p.85

練習
12

放物線 $y=2x^2-4x$ を平行移動して放物線 $y=2x^2+4x-3$ に重ねるには、どのように平行移動すればよいか。

指針 2 次関数のグラフの平行移動 2 つの放物線の頂点の移動に着目する。

解答 $y=2x^2-4x$ を変形すると $y=2(x-1)^2-2$ $\leftarrow 2x^2-4x$
 よって、頂点は $\begin{aligned} &=2(x^2-2x) \\ &=2\{(x-1)^2-1^2\} \\ &=2(x-1)^2-2 \end{aligned}$
 点 $(1, -2)$
 $y=2x^2+4x-3$ を変形すると $\leftarrow 2x^2+4x-3$
 $y=2(x+1)^2-5$ $\begin{aligned} &=2(x^2+2x)-3 \\ &=2\{(x+1)^2-1^2\}-3 \\ &=2(x+1)^2-5 \end{aligned}$
 よって、頂点は
 点 $(-1, -5)$

頂点は点 $(1, -2)$ から点 $(-1, -5)$ に移動するから

x 軸方向に $-1-1=-2$ 、 y 軸方向に $-5-(-2)=-3$ だけ平行移動すればよい。 **答**

研究 グラフの平行移動

まとめ

放物線の平行移動後の方程式

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると、移動後の放物線の方程式は、次のようになる。

$$y-q=f(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y=f(x-p)+q$$

練習
1

2 次関数 $y=2x^2-5x+3$ のグラフを, x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動するとき, 移動後の放物線の方程式を求めよ。

指針 **グラフの平行移動** 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを, x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したときの方程式は $y-q=f(x-p)$ となる。

解答 移動後の放物線の方程式は

$$y-1=2\{x-(-2)\}^2-5\{x-(-2)\}+3$$

すなわち $y=2x^2+3x+2$ 答

3
章

2 次関数

研究 グラフの対称移動

まとめ

1 対称移動

図形上の各点を, 直線または点に関して対称な位置に動かすことを, 直線または点に関して 対称移動 するという。

2 放物線の対称移動後の方程式

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを, x 軸, y 軸, 原点それぞれに関して対称移動すると, 移動後の放物線の方程式は, 次のようになる。

$$x \text{ 軸: } -y=f(x) \quad y \text{ 軸: } y=f(-x) \quad \text{原点: } -y=f(-x)$$

練習
1

2 次関数 $y=x^2+4x+1$ のグラフの, x 軸, y 軸, 原点それぞれに関する対称移動後の放物線の方程式を求めよ。

指針 **グラフの対称移動** 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを, x 軸, y 軸, 原点それぞれに関して対称移動すると, 方程式は次のようになる。

$$x \text{ 軸: } -y=f(x) \quad y \text{ 軸: } y=f(-x) \quad \text{原点: } -y=f(-x)$$

解答 x 軸: $-y=x^2+4x+1$

すなわち $y=-x^2-4x-1$ 答

y 軸: $y=(-x)^2+4(-x)+1$

すなわち $y=x^2-4x+1$ 答

原点: $-y=(-x)^2+4(-x)+1$

すなわち $y=-x^2+4x-1$ 答

第3章 第1節

問題

教 p.88

- 1 a, b は定数とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 - bx - a + b$ において、次の値を求めよ。

(1) $f(1)$

(2) $f(0)$

(3) $f(-2)$

指針 関数 $f(x)$ の値 関数 $f(x)$ について、 $f(k)$ の値とは $x=k$ のときの $f(x)$ の値である。

解答 (1) $f(1) = a \cdot 1^2 - b \cdot 1 - a + b$
 $= a - b - a + b = 0$ 答

(2) $f(0) = a \cdot 0^2 - b \cdot 0 - a + b$
 $= -a + b$ 答

(3) $f(-2) = a \cdot (-2)^2 - b \cdot (-2) - a + b$
 $= 4a + 2b - a + b$
 $= 3a + 3b$ 答

教 p.88

- 2 関数 $y = ax + b$ ($-1 \leq x \leq 5$) の値域が、 $1 \leq y \leq 13$ となるような定数 a, b の値を求めよ。ただし、 $a < 0$ とする。

指針 1 次関数の決定 1 次関数 $y = ax + b$ は、 $a < 0$ のとき x が増加すれば y は減少する。したがって、 $x = -1$ で最大値、 $x = 5$ で最小値をとる。このことから値域が求められる。

解答 $a < 0$ であるから、1 次関数 $y = ax + b$ は、 x が増加すると y は減少する。よって、 y は $x = -1$ で最大値 $-a + b$ をとり、
 $x = 5$ で最小値 $5a + b$ をとる。

したがって、値域は $5a + b \leq y \leq -a + b$

これが $1 \leq y \leq 13$ と一致するから

$$5a + b = 1, \quad -a + b = 13$$

これを解くと $a = -2, b = 11$ これは $a < 0$ を満たす。

答 $a = -2, b = 11$

- 3 放物線 $y = -2x^2$ を、頂点が次の点となるように平行移動する。このとき、移動後の放物線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(1, -3)$

(2) 点 $(-2, 5)$

指針 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ $y = ax^2$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線は、頂点が点 (p, q) であり、その方程式は $y = a(x-p)^2 + q$ で表される。

解答 (1) 移動後の放物線の方程式は

$$y = -2(x-1)^2 - 3 \quad \text{答}$$

(2) 移動後の放物線の方程式は

$$y = -2(x+2)^2 + 5 \quad \text{答}$$

別解 右辺を計算して次のように答えてもよい。

$$(1) \quad y = -2x^2 + 4x - 5 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad y = -2x^2 - 8x - 3 \quad \text{答}$$

- 4 次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

(2) $y = -3x^2 + 3x + \frac{1}{4}$

(3) $y = (x-1)(x-5)$

(4) $y = (2x-1)(x+3)$

指針 2次関数のグラフ 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかくには、

$y = ax^2 + bx + c$ を、 $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形する。

頂点 (p, q) を原点とみて、 $y = ax^2$ のグラフをかく。

解答 (1) $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 2x) + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\{(x+1)^2 - 1^2\} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2$$

よって $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$

グラフは次ページの図(1)。

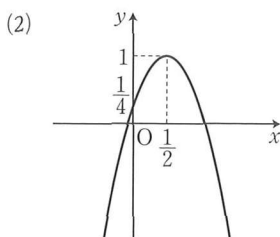
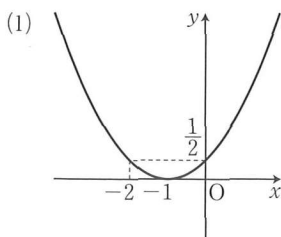
軸は直線 $x = -1$ 、頂点は点 $(-1, 0)$ 答

$$\begin{aligned}
 (2) \quad -3x^2 + 3x + \frac{1}{4} &= -3(x^2 - x) + \frac{1}{4} \\
 &= -3\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} + \frac{1}{4} \\
 &= -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

グラフは下の図(2)。

軸は直線 $x = \frac{1}{2}$, 頂点は点 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 答



$$\begin{aligned}
 (3) \quad (x-1)(x-5) &= x^2 - 6x + 5 \\
 &= (x-3)^2 - 3^2 + 5 \\
 &= (x-3)^2 - 4
 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad y = (x-3)^2 - 4$$

グラフは次ページの図(3)。

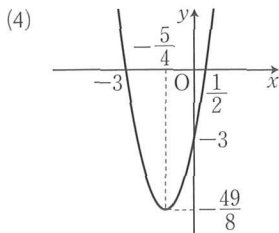
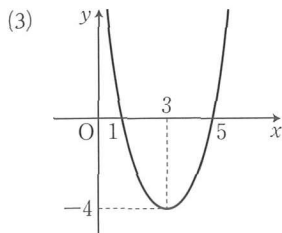
軸は直線 $x = 3$, 頂点は点 $(3, -4)$ 答

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (2x-1)(x+3) &= 2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) - 3 \\
 &= 2\left\{\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right\} - 3 = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{25}{16} - 3 \\
 &= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}
 \end{aligned}$$

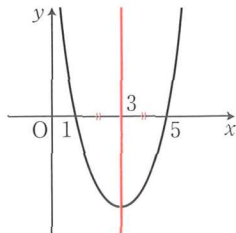
$$\text{よって} \quad y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

グラフは次ページの図(4)。

軸は直線 $x = -\frac{5}{4}$, 頂点は点 $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ 答



補足 (3) $y=(x-1)(x-5)$ のグラフは、 x 軸と 2 点 $(1, 0)$, $(5, 0)$ で交わる。この 2 点は放物線の軸に関して対称であるから、この 2 点の midpoint $(3, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線 $x=3$ がこの放物線の軸となる。



教 p.88

3 章

2 次関数

5 放物線 $y=2x^2-4x-1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) この放物線の頂点を A とするとき、A の座標を求めよ。
- (2) この放物線を、 x 軸方向に 2、 y 軸方向に -1 だけ平行移動したとき、移動後の放物線の方程式を求めよ。

指針 2 次関数のグラフの平行移動

- (1) $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形すれば、頂点は点 (p, q)
- (2) $A(p, q)$ を x 軸方向に 2、 y 軸方向に -1 だけ移動した点 $(p+2, q-1)$ が求める放物線の頂点である。

解答 (1) $2x^2-4x-1=2(x^2-2x)-1=2\{(x-1)^2-1^2\}-1$
 $=2(x-1)^2-2\cdot 1-1$
 $=2(x-1)^2-3$

よって $y=2(x-1)^2-3$

したがって、頂点 A の座標は $(1, -3)$ **答**

- (2) 頂点 A $(1, -3)$ を x 軸方向に 2、 y 軸方向に -1 だけ移動すると点 $(1+2, -3-1)$ 、すなわち点 $(3, -4)$

よって、頂点が点 $(3, -4)$ であるから

$$y=2(x-3)^2-4 \quad (y=2x^2-12x+14 \text{ でもよい}) \quad \text{答}$$

別解 (2) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると、移動後の放物線の方程式は $y=f(x-p)+q$

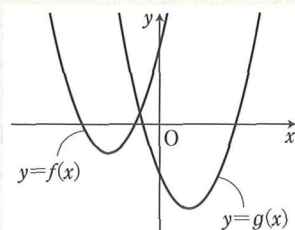
ゆえに、 $f(x)=2x^2-4x-1$, $p=2$, $q=-1$ とすると

$$\begin{aligned} f(x-2)-1 &= 2(x-2)^2-4(x-2)-1-1 \\ &= 2(x^2-4x+4)-4x+8-1-1 \\ &= 2x^2-12x+14 \end{aligned}$$

よって、求める方程式は $y=2x^2-12x+14$ 答

教 p.88

- 6 右の図は2つの2次関数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフである。次の問いに答えよ。



- (1) $y=f(x)$ のグラフの頂点と $y=g(x)$ のグラフの頂点について、 y 座標が大きいのはどちらか。
- (2) $f(0)$, $g(0)$ の符号を答えよ。

指針 2つの2次関数のグラフの位置関係 (1) 頂点の位置が高い方

- (2) y 軸との交点の y 座標 (y 切片) の符号

解答 (1) 座標平面では、より上にある点の y 座標の値が大きい。

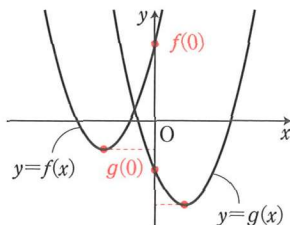
$y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフの頂点では、 $y=f(x)$ のグラフの頂点の方が上にあるから、 $y=f(x)$ のグラフの頂点の y 座標が大きい。 答

- (2) $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフと y 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

このとき、P, Q の y 座標が、それぞれ $f(0)$, $g(0)$ である。

P は原点より上に、Q は原点より下にあるから、 $f(0)$ は 0 より大きく、 $g(0)$ は 0 より小さい。

よって、 $f(0)$ の符号は正、 $g(0)$ の符号は負である。 答



第2節 2次関数の値の変化

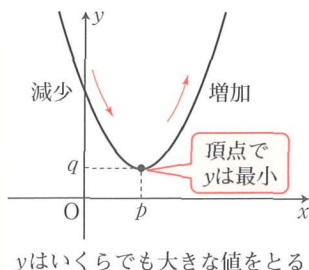
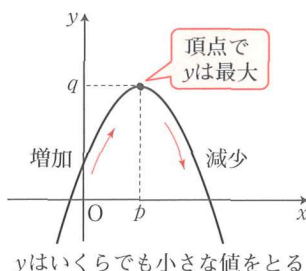
3 2次関数の最大・最小

A 2次関数の最大・最小

まとめ

3章

2次関数

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小 $a>0$ のとき, $x=p$ で最小値 q をとる。最大値はない。 $a<0$ のとき, $x=p$ で最大値 q をとる。最小値はない。 $a>0$ のとき $a<0$ のとき練習
13

教 p.89

次の2次関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。

(1) $y=2(x-3)^2+4$

(2) $y=-2(x+1)^2-3$

指針 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小(1) $a>0$ であるから, 頂点で最小となり, 最大値はない。(2) $a<0$ であるから, 頂点で最大となり, 最小値はない。

解答 (1) 放物線は下に凸で, 頂点は点 (3, 4) である。

よって, y は $x=3$ で最小値 4 をとる。

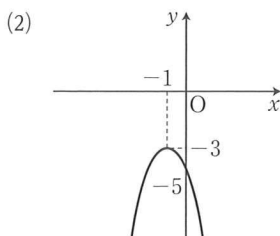
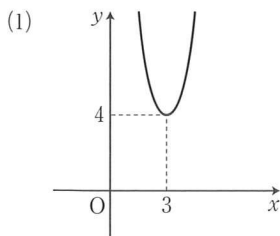
最大値はない。 答

(2) 放物線は上に凸で, 頂点は点 (-1, -3) である。

よって, y は $x=-1$ で最大値 -3 をとる。

最小値はない。 答



練習
14

次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y = x^2 - 6x + 5$

(2) $y = -2x^2 + 5x$

指針 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最大・最小

$y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x-p)^2 + q$ の形に変形する。

$a > 0$ のとき最小値があり， $a < 0$ のとき最大値がある。

解答 (1) $y = x^2 - 6x + 5$ を変形すると

$$y = (x-3)^2 - 4$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow x^2 - 6x + 5 \\ &= (x-3)^2 - 3^2 + 5 \end{aligned}$$

放物線は下に凸で，頂点は点 $(3, -4)$ である。

よって， y は $x=3$ で最小値 -4 をとる。最大値はない。 答

(2) $y = -2x^2 + 5x$ を変形すると

$$y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow -2x^2 + 5x \\ &= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) \\ &= -2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

放物線は上に凸で，頂点は点 $\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{8}\right)$ である。

よって， y は $x = \frac{5}{4}$ で最大値 $\frac{25}{8}$ をとる。最小値はない。 答

深める

教 p.90

$x = -1$ で最小値をとる2次関数を1つ定めてみよう。

指針 「最小値をとる」から，グラフは下に凸の放物線である。そして，頂点の x 座標が -1 であるから，求める2次関数は， $a > 0$ として $y = a(x+1)^2 + q$ の形である。

解答 $y = (x+1)^2$ すなわち $y = x^2 + 2x + 1$ 答

B 定義域に制限がある場合の関数の最大・最小

まとめ

定義域が制限されたときの最大・最小

定義域が $h \leq x \leq k$ のように限られたとき、与えられた関数のグラフをかき、頂点の座標と定義域の両端 $x=h$, $x=k$ における関数の値に着目して最大値、最小値を求める。

練習
15

次の関数の最大値、最小値を求めよ。

(1) $y=x^2+2x+3$ ($-2 \leq x \leq 2$) (2) $y=-x^2+4x-3$ ($0 \leq x \leq 3$)

(3) $y=3x^2+6x-1$ ($1 \leq x \leq 3$) (4) $y=-2x^2+12x$ ($0 \leq x \leq 6$)

教 p.91

3
章2
次関数

指針 定義域に制限がある場合の最大・最小 定義域の両端、頂点の位置関係に注意する。

解答 (1) $y=x^2+2x+3$ を変形すると

$$y=(x+1)^2+2$$

$-2 \leq x \leq 2$ でのグラフは、下の図(1)の実線部分である。

よって、 y は $x=2$ で最大値 11 をとり、

$x=-1$ で最小値 2 をとる。 答

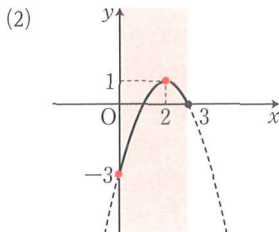
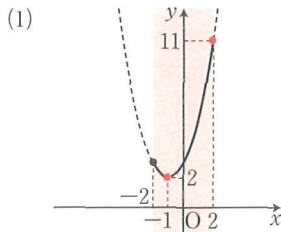
(2) $y=-x^2+4x-3$ を変形すると

$$y=-(x-2)^2+1$$

$0 \leq x \leq 3$ でのグラフは、下の図(2)の実線部分である。

よって、 y は $x=2$ で最大値 1 をとり、

$x=0$ で最小値 -3 をとる。 答



- (3)
- $y=3x^2+6x-1$
- を変形すると

$$y=3(x+1)^2-4$$

$1 \leq x \leq 3$ でのグラフは下の図 (3) の実線部分である。

よって、 y は $x=3$ で最大値 44 をとり、

$x=1$ で最小値 8 をとる。 答

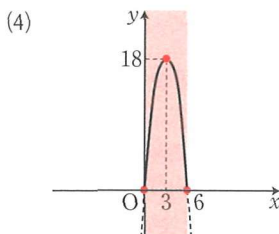
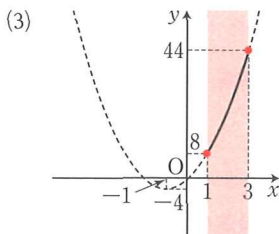
- (4)
- $y=-2x^2+12x$
- を変形すると

$$y=-2(x-3)^2+18$$

$0 \leq x \leq 6$ でのグラフは下の図 (4) の実線部分である。

よって、 y は $x=3$ で最大値 18 をとり、

$x=0, 6$ で最小値 0 をとる。 答



■
深める

教 p.91

教科書例題 4 (2) の関数 $y=-2x^2+4x+5$ に対して、次の条件を満たすように定義域を 1 つ定めてみよう。

条件：定義域の両端以外で最大値をとる、定義域の右端のみで最小値をとる。

指針 2 次関数が、定義域の両端以外で最大値をとるのは、定義域内に放物線の軸がある、すなわち頂点の x 座標の値が定義域内にあるとき。また、定義域の右端のみで最小値をとるのは、定義域の右端に対する y 座標が左端に対する y 座標より小さくなるとき。

解答 $y=-2(x-1)^2+7$ において、求める定義域を $a \leq x \leq b$ とすると、軸の式が $x=1$ であるから

$$a < 1 < b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また $f(x)=-2x^2+4x+5$ とおくと $f(a) > f(b)$

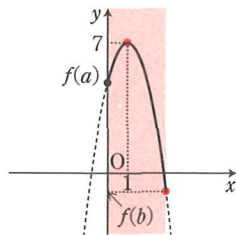
すなわち $-2a^2+4a+5 > -2b^2+4b+5$ から

$$(a-b)(a+b-2) < 0$$

$a-b < 0$ であるから $a+b-2 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

よって、①、②を同時に満たす a, b の値を求める。

たとえば、 $a=0, b=3$ すなわち $0 \leq x \leq 3$ 答



練習
16

次の条件を満たすように、定数 c の値を定めよ。

(1) 関数 $y=x^2-2x+c$ ($-2 \leq x \leq 0$) の最大値が 5 である。

(2) 関数 $y=-x^2+6x+c$ ($1 \leq x \leq 4$) の最小値が -7 である。

指針 最大値・最小値から係数決定

(1) $y=(x-1)^2+c-1$ と変形できるから、 $x=1$ で最小値を、また定義域の端点で最大値をとると考えられる。(2) も同様に考える。

解答 (1) 式を変形すると $y=(x-1)^2+c-1$
 $-2 \leq x \leq 0$ であるから、 $x=-2$ で最大値をとる。
 $x=-2$ のとき $y=(-2)^2-2 \cdot (-2)+c=c+8$
 よって、 $c+8=5$ から $c=-3$ 答

← 軸：直線 $x=1$
 から最も遠くにある定義域の端の点、すなわち、 $x=-2$ で最大

(2) 式を変形すると $y=-(x-3)^2+c+9$
 $1 \leq x \leq 4$ であるから、 $x=1$ で最小値をとる。
 $x=1$ のとき $y=c+5$
 よって、 $c+5=-7$ から $c=-12$ 答

← 軸：直線 $x=3$
 から最も遠くにある定義域の端の点、すなわち $x=1$ で最小

3
章2
次
関
数

C 関数の最大・最小と場合分け

練習
17

a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=-x^2+2x+1 \quad (0 \leq x \leq a)$$

指針 定義域の端が変化する関数の最大値 関数のグラフは上に凸で、軸は直線 $x=1$ である。 $0 < a < 1$, $1 \leq a$ で場合分けする。

解答 関数の式を変形すると $y=-(x-1)^2+2$ ($0 \leq x \leq a$)

[1] $0 < a < 1$ のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

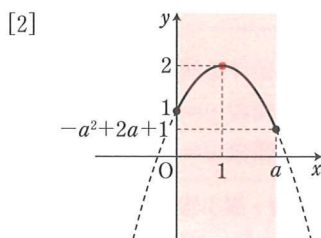
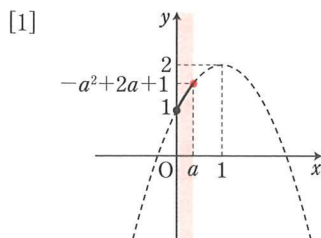
よって、 y は $x=a$ で最大値 $-a^2+2a+1$ をとる。

[2] $1 \leq a$ のとき

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって、 y は $x=1$ で最大値 2 をとる。

答 $0 < a < 1$ のとき $x=a$ で最大値 $-a^2+2a+1$
 $1 \leq a$ のとき $x=1$ で最大値 2

練習
18

教 p.94

a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=2x^2-4ax+2a^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

指針 軸の位置が変化する関数の最小値 関数のグラフは下に凸で、軸は直線 $x=a$ である。軸が、定義域よりも左側にある場合、間にある場合、右側にある場合で場合分けする。

解答 関数の式を変形すると $y=2(x-a)^2$ ($0 \leq x \leq 1$)

[1] $a < 0$ のとき

この関数のグラフは下の図 [1] の実線部分である。

よって、 y は $x=0$ で最小値 $2a^2$ をとる。

[2] $0 \leq a \leq 1$ のとき

この関数のグラフは下の図 [2] の実線部分である。

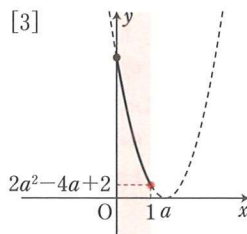
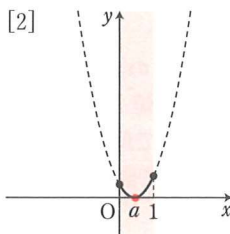
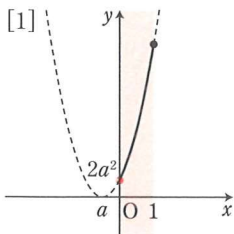
よって、 y は $x=a$ で最小値 0 をとる。

[3] $1 < a$ のとき

この関数のグラフは下の図 [3] の実線部分である。

よって、 y は $x=1$ で最小値 $2a^2-4a+2$ をとる。

答 $a < 0$ のとき $x=0$ で最小値 $2a^2$
 $0 \leq a \leq 1$ のとき $x=a$ で最小値 0
 $1 < a$ のとき $x=1$ で最小値 $2a^2-4a+2$



D 最大・最小の応用

まとめ

2 次関数の最大・最小の応用

最大値や最小値を求める文章題を解くには、次の①～④の手順で進める。

- ① 変数 (x) を適当に選ぶ。このとき、式が作りやすいように何を x とおけばよいかを決める。
- ② 変数 (x) のとる範囲(定義域)を求める。
- ③ 求めようとする量を x の2次式(x の2次関数)で表す。
- ④ 定義域での2次関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求める。

3章

2次関数

練習
19

直角三角形 ABC において、直角をはさむ2辺 AB, BC の長さの和が 14 cm であるとする。このような直角三角形の面積の最大値を求めよ。



教 p.95

指針 2 次関数の最大・最小の応用 $AB+BC=14$ であるから、 $AB=x$ (cm) とすると、 $BC=14-x$ (cm) となる。また、 $AB>0$, $BC>0$ から、定義域が求められる。

解答 $AB=x$ (cm) とすると、
 $BC=14-x$ (cm) である。

$AB>0$, $BC>0$ から

$$x>0 \text{ かつ } 14-x>0$$

$$\text{よって } 0<x<14 \text{ …… ①}$$

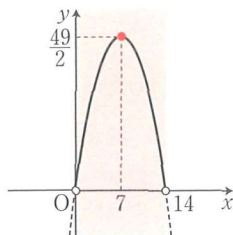
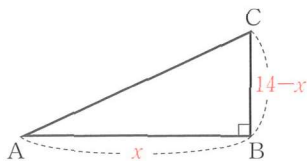
また、直角三角形 ABC の面積を $y \text{ cm}^2$ とすると

$$y = \frac{1}{2}x(14-x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x$$

$$\text{これを变形すると } y = -\frac{1}{2}(x-7)^2 + \frac{49}{2}$$

① において、 y は $x=7$ すなわち $AB=7$ で
最大値 $\frac{49}{2}$ をとる。

したがって、面積の最大値は $\frac{49}{2} \text{ cm}^2$ 答



4 2次関数の決定

A 放物線の頂点や軸から関数を決定

まとめ

放物線の頂点や軸による2次関数の決定

2次関数を決定する問題で、頂点や軸がわかっているとき、 $y=a(x-p)^2+q$ の形を利用する。

- 1 頂点 (p, q) とグラフ上の1点がわかっている場合

$y=a(x-p)^2+q$ とおく。わかっている点の x 座標、 y 座標を代入して a の値を決定する。

- 2 軸の直線 $x=p$ とグラフ上の2点がわかっている場合

$y=a(x-p)^2+q$ とおく。2点の x 座標、 y 座標を代入して、 a, q についての連立方程式を解く。

練習
20

教 p.96

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) 頂点が点 $(-2, 4)$ で、点 $(-4, 2)$ を通る。
(2) 軸が直線 $x=2$ で、2点 $(-1, 5)$, $(1, -11)$ を通る。

指針 頂点や軸による2次関数の決定

頂点や軸がわかっているときは、 $y=a(x-p)^2+q$ の形を利用する。

解答 (1) 頂点が点 $(-2, 4)$ であるから、この2次関数は

$y=a(x+2)^2+4$ の形に表される。

グラフが点 $(-4, 2)$ を通るから $2=a(-4+2)^2+4$

よって $a=-\frac{1}{2}$

したがって $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+4$ 答

- (2) 軸が直線 $x=2$ であるから、この2次関数は

$y=a(x-2)^2+q$ の形に表される。

グラフが点 $(-1, 5)$ を通るから $5=a(-1-2)^2+q$

点 $(1, -11)$ を通るから $-11=a(1-2)^2+q$

よって $9a+q=5, a+q=-11$

これを解くと $a=2, q=-13$

したがって $y=2(x-2)^2-13$ 答

B 放物線上の3点から関数を決定

まとめ

1 連立3元1次方程式

3文字を含む1次方程式を組み合わせた連立方程式を連立3元1次方程式という。

2 放物線上の3点による2次関数の決定

2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。3点の x 座標、 y 座標をそれぞれ代入して、 a 、 b 、 c についての連立3元1次方程式を解く。

3 連立3元1次方程式の解き方

- ① 1文字を消去して、残り2文字の連立方程式を導く。
- ② 2文字の連立方程式を解く。
- ③ 残りの1文字の値を求める。

3章

2次関数

練習
21

次の連立3元1次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ 9a+3b+c=4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y-z=-2 \\ 3x+2y-z=12 \end{cases}$$

教 p.98

指針 連立3元1次方程式の解き方 (1) c を消去して、 a と b の連立2元1次方程式を作り、それを解く。

解答 (1)
$$\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots \cdots ① \\ 4a+2b+c=0 & \cdots \cdots ② \\ 9a+3b+c=4 & \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

②-① から $3a+b=0$ $\cdots \cdots ④$

③-② から $5a+b=4$ $\cdots \cdots ⑤$

④、⑤を解くと $a=2$ 、 $b=-6$

これらを①に代入して $c=4$

したがって $a=2$ 、 $b=-6$ 、 $c=4$ 答

(2)
$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots \cdots ① \\ x-2y-z=-2 & \cdots \cdots ② \\ 3x+2y-z=12 & \cdots \cdots ③ \end{cases}$$

①+② から $2x-y=4$ $\cdots \cdots ④$

③-② から $2x+4y=14$ $\cdots \cdots ⑤$

④、⑤を解くと $x=3$ 、 $y=2$

これらを①に代入して $z=1$

したがって $x=3$ 、 $y=2$ 、 $z=1$ 答

← c を消去する。

← c を消去する。

← ⑤-④ から、まず、 a の値が求まる。

練習
22

教 p.98

2 次関数のグラフが 3 点 $(2, -2)$, $(3, 5)$, $(-1, 1)$ を通るとき、その 2 次関数を求めよ。

指針 放物線上の 3 点による 2 次関数の決定

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。グラフが与えられた 3 点を通るから、それぞれの点の x 座標, y 座標を代入して, a , b , c についての連立 3 元 1 次方程式を解く。

解答 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが 3 点 $(2, -2)$, $(3, 5)$, $(-1, 1)$ を通るから

$$-2=4a+2b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$5=9a+3b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$1=a-b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1} \text{ から } 5a+b=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{3} \text{ から } 3a+3b=-3$$

$$\text{よって } a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}-\textcircled{5} \text{ から } 4a=8 \quad \text{よって } a=2$$

$$\textcircled{5} \text{ に代入して } b=-3$$

$$a=2, b=-3 \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入して } c=-4$$

$$\text{したがって } y=2x^2-3x-4 \quad \text{答}$$

第 3 章 第 2 節

問 題

教 p.99

7 次の関数の最大値, 最小値を求めよ。

$$(1) y=x^2-3x-1 \quad (0 \leq x \leq 2) \quad (2) y=-3x^2-5x \quad (-2 \leq x \leq 1)$$

指針 定義域に制限がある場合の最大・最小 グラフの軸の位置, 定義域の端における点の位置関係に注意して最大値, 最小値を求める。

解答 (1) $y=x^2-3x-1$ を変形すると

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

$0 \leq x \leq 2$ でのグラフは下の図 (1) の実線部分である。

よって, y は

$x=0$ で最大値 -1 をとり,

$x=\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{13}{4}$ をとる。答

(2) $y = -3x^2 - 5x$ を変形すると

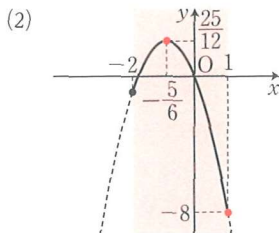
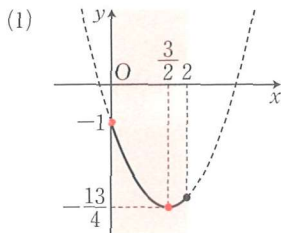
$$y = -3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12}$$

$-2 \leq x \leq 1$ でのグラフは下の図(2)の実線部分である。

よって、 y は

$$x = -\frac{5}{6} \text{ で最大値 } \frac{25}{12} \text{ をとり,}$$

$$x = 1 \text{ で最小値 } -8 \text{ をとる。} \quad \text{答}$$



教 p.99

8 a は定数とする。関数 $y = x^2 - 2ax$ ($0 \leq x \leq 2$) について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。

指針 軸の位置による場合分けをする関数の最大・最小 (1) は、放物線の軸が定義域よりも左側にある場合、間にある場合、右側にある場合で場合分けをする。(2) は、放物線の軸が定義域の中央より左側にある場合、中央にある場合、中央より右側にある場合で場合分けする。

解答 関数の式を変形すると $y = (x-a)^2 - a^2$ ($0 \leq x \leq 2$)

(1) [1] $a < 0$ のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって、 y は $x = 0$ で最小値 0 をとる。

[2] $0 \leq a \leq 2$ のとき

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって、 y は $x = a$ で最小値 $-a^2$ をとる。

[3] $2 < a$ のとき

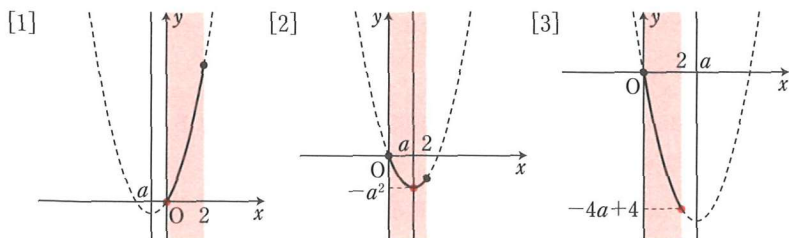
この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって、 y は $x = 2$ で最小値 $-4a + 4$ をとる。

答 $a < 0$ のとき $x = 0$ で最小値 0

$0 \leq a \leq 2$ のとき $x = a$ で最小値 $-a^2$

$2 < a$ のとき $x = 2$ で最小値 $-4a + 4$



(2) [1] $a < 1$ のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって、 y は $x=2$ で最大値 $-4a+4$ をとる。

[2] $a=1$ のとき

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって、 y は $x=0, 2$ で最大値 0 をとる。

[3] $1 < a$ のとき

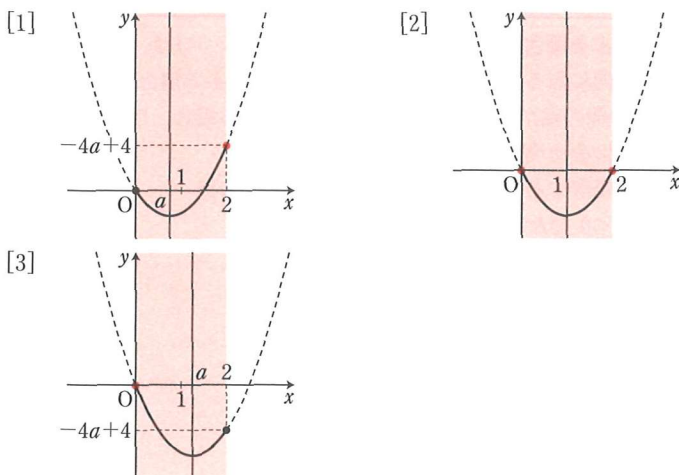
この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって、 y は $x=0$ で最大値 0 をとる。

答 $a < 1$ のとき $x=2$ で最大値 $-4a+4$

$a=1$ のとき $x=0, 2$ で最大値 0

$1 < a$ のとき $x=0$ で最大値 0



9 ある商品について、次のことがわかっている。

[1] 1個 200 円で仕入れて売り値を 250 円として売ると 1 日に 600 個売れる。

[2] 1 個につき売り値を 1 円値下げするごとに 1 日の売上個数は 15 個ずつ増加する。

[3] 1 個につき売り値を 1 円値上げするごとに 1 日の売上個数は 15 個ずつ減少する。

この商品を 1 個 200 円で何個か仕入れ、仕入れた商品をその日のうちに完売させるとする。このとき、1 日の利益を最大にする仕入れの個数と 1 個あたりの売り値を求めよ。

指針 2 次関数の応用問題 文章題では、何を x とおくかをまず考える。求めるものは、1 日の仕入れの個数と 1 個あたりの売り値であり、与えられた条件では 250 円の売り値を基準にしているから、1 個あたりの売り値を $(250+x)$ 円、利益を y 円とおいて計算するとよい。

利益を出すには、1 個あたりの売り値は仕入れ値の 200 円を超える値段にする必要がある。

解答 1 個 200 円で仕入れた商品を、1 個 $(250+x)$ 円で売ると、1 個あたりの利益は $(250+x)-200=50+x$ (円)

利益を出すには、 $50+x>0$ である必要があるから $x>-50$ …… ①

また、条件 [2], [3] から、1 日の売上個数は $(600-15x)$ 個である。

ただし、売れないと利益は出ないから $600-15x>0$

すなわち $x<\frac{600}{15}=40$ …… ②

ゆえに、①, ② から $-50<x<40$ …… ③

このとき、1 日の利益を y 円とすると

$$\begin{aligned} y &= (50+x)(600-15x) = -15(x+50)(x-40) \\ &= -15(x^2+10x-2000) = -15\{(x+5)^2-2025\} \\ &= -15(x+5)^2+30375 \end{aligned}$$

③ から、 $x=-5$ で y は最大値 30375 をとる。

ここで、 $x=-5$ のとき $250+x=245$, $600-15x=675$

よって、675 個仕入れて 1 個あたりの売り値を 245 円で完売すれば、1 日の利益は最大になる。

答 仕入れの個数は 675 個、1 個あたりの売り値は 245 円

10 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

- (1) 頂点は放物線 $y=2x^2+4x+1$ の頂点と同じであり、 y 軸と点 $(0, 2)$ で交わる。
- (2) 3 点 $(3, 0)$, $(-1, 0)$, $(2, 6)$ を通る。

指針 頂点や 3 点の座標による 2 次関数の決定

- (1) 頂点がわかっているときは、 $y=a(x-p)^2+q$ の形を利用する。
- (2) 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおいて、3 点の座標を代入し、 a , b , c の値を求める。

解答 (1) $y=2x^2+4x+1$ を変形すると $y=2(x+1)^2-1$

求める放物線の頂点は 点 $(-1, -1)$

よって、この放物線の方程式は $y=a(x+1)^2-1$ の形に表される。

グラフが点 $(0, 2)$ を通るから $2=a-1$

よって $a=3$

したがって、求める 2 次関数は $y=3(x+1)^2-1$ 答

- (2) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが 3 点 $(3, 0)$, $(-1, 0)$, $(2, 6)$ を通るから

$$0=9a+3b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$0=a-b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$6=4a+2b+c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から } 0=8a+4b$$

$$\text{よって } 2a+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{2} \text{ から } 6=3a+3b$$

$$\text{よって } a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}-\textcircled{5} \text{ から } a=-2$$

$$\textcircled{5} \text{ に代入して } b=4$$

$$a=-2, b=4 \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入して } c=6$$

したがって、求める 2 次関数は

$$y=-2x^2+4x+6 \quad \text{答}$$

別解 (1) 右辺を計算して次のように答えてもよい。

$$y=3x^2+6x+2 \quad \text{答}$$

11 $x=2$ で最大値 8 をとり, $x=1$ で $y=5$ となる 2 次関数を求めよ。

指針 頂点と通る点による関数の決定 定義域に関わらず最大値が決まるので, この関数のグラフは上に凸で, 最大値をとる点がグラフの頂点である。

解答 2 次関数が最大値をとるから, この関数のグラフは上に凸で, 頂点が点 $(2, 8)$ である。

よって, この関数を $y=a(x-2)^2+8$ ($a<0$) とおく。

$x=1$ のとき $y=5$ であるから $5=a+8$

よって $a=-3$

したがって, 求める 2 次関数は

$$y=-3(x-2)^2+8 \quad \text{答}$$

別解 右辺を計算して次のように答えてもよい。

$$y=-3x^2+12x-4 \quad \text{答}$$

12 秒速 20 m の速さで進んでいた自動車が, 急ブレーキをかけてから t 秒間に進んだ距離を y m とするとき, y は t の 2 次関数になるという。 t, y を計算すると右の表が得られた。3 秒間に進んだ距離を求めよ。

t	2	4	5
y	32	48	50

指針 2 次関数の応用問題 y が t の 2 次関数で表されるから $y=at^2+bt+c$, $a \neq 0$ において, 表の値から a, b, c についての連立 3 元 1 次方程式を作ってそれを解く。

解答 $y=at^2+bt+c$, $a \neq 0$ とすると, 表から

$$4a+2b+c=32 \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad 16a+4b+c=48 \quad \cdots \cdots \text{②},$$

$$25a+5b+c=50 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{①, ② から } 6a+b=8 \quad \text{②, ③ から } 9a+b=2$$

これらを解くと, $a=-2$, $b=20$ であり, $a \neq 0$ を満たす。

このとき, ① から $c=0$

ゆえに $y=-2t^2+20t$

よって, 3 秒間に進んだ距離は $-2 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 = 42$ (m) 答

第3節 2次方程式と2次不等式

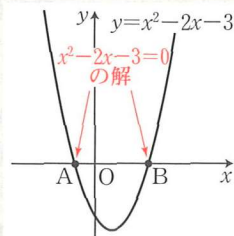
5 2次方程式

A 因数分解を使う解き方

まとめ

1 2次方程式

2次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフは、右の図のように x 軸と2点 A, B で交わる。点 A, B の y 座標は0であるから、その x 座標は、2次方程式 $x^2-2x-3=0$ の解である。



2 数の積の性質

 $AB=0$ ならば

 $A=0$ または $B=0$
練習
23

教 p.100

次の2次方程式を解け。

(1) $x(x+4)=0$

(2) $x^2-5x+6=0$

(3) $2x^2+3x+1=0$

(4) $3x^2-4x-4=0$

指針 2次方程式の因数分解による解き方 左辺を因数分解して、数の積の性質

 $AB=0$ ならば $A=0$ または $B=0$

を利用して解く。

解答 (1) $x(x+4)=0$ から $x=0$ または $x+4=0$

よって、解は $x=0, -4$ 答

(2) 左辺を因数分解すると $(x-2)(x-3)=0$

よって $x-2=0$ または $x-3=0$

したがって、解は $x=2, 3$ 答

(3) 左辺を因数分解すると

$$(x+1)(2x+1)=0$$

よって $x+1=0$ または $2x+1=0$

したがって、解は $x=-1, -\frac{1}{2}$ 答

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow & 1 & \rightarrow 2 \\ & 2 & \rightarrow 1 \\ & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

(4) 左辺を因数分解すると

$$(x-2)(3x+2)=0$$

よって $x-2=0$ または $3x+2=0$ したがって、解は $x=2, -\frac{2}{3}$ 答

$$\leftarrow \begin{array}{ccc} 1 & -2 & \rightarrow -6 \\ 3 & 2 & \rightarrow 2 \\ 3 & -4 & -4 \end{array}$$

B 2次方程式の解の公式

まとめ

3章

2次関数

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は、 $b^2-4ac \geq 0$ のとき解をもち、その解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

 x の係数が2の倍数のときは、分母・分子は2で約分できる。2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ は、 $b'^2-ac \geq 0$ のとき解をもち、その解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

注意 $b^2-4ac < 0$ のとき、この2次方程式は実数の解をもたない。練習
24

教 p.101

次の2次方程式を解け。

(1) $x^2+7x+4=0$

(2) $3x^2+5x-1=0$

(3) $3x^2-8x-3=0$

(4) $4x^2+12x+9=0$

指針 2次方程式の解の公式による解き方 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は $b^2-4ac \geq 0$ のとき解をもち、その解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

この解の公式を用いて解く。

解答 (1) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$\leftarrow a=1, b=7, c=4$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2} \quad \text{答}$$

(2) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$

$\leftarrow a=3, b=5, c=-1$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} \\
 &= \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} \\
 &= 3, -\frac{1}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow a=3, \quad b=-8, \quad c=-3$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad x &= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} \\
 &= \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow a=4, \quad b=12, \quad c=9$$

練習
25

教 p.102

次の2次方程式を解け。

$$(1) \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$(3) \quad x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$(4) \quad x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$$

指針 2次方程式の解の公式による解き方 (x の係数が2の倍数) 2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ は, $b'^2 - ac \geq 0$ のとき解をもち, その解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-2)}}{1} \\
 &= -1 \pm \sqrt{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow a=1, \quad b'=1, \quad c=-2$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \cdot (-2)}}{3} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow a=3, \quad b'=-2, \quad c=-2$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad x &= \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 3}}{1} \\
 &= -\sqrt{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow a=1, \quad b'=\sqrt{3}, \quad c=3$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad x &= \frac{-(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 2}}{1} \\
 &= \sqrt{3} \pm 1 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow a=1, \quad b'=-\sqrt{3}, \quad c=2$$

C 2次方程式の係数と実数解

まとめ

1 実数解

方程式における実数の解を、単に 実数解 という。

2 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解と判別式 $D=b^2-4ac$ の符号2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について、 b^2-4ac を判別式といい、ふつう D で表す。2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解とその個数について、 D の符号によって次のように分類される。なお、 $D=b^2-4ac=0$ のときは、2つの解が重なったものと考えて、この解を 重解 という。

$D=b^2-4ac$ の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
実数解	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (異なる2つの実数解)	$x=-\frac{b}{2a}$ (重解)	ない
実数解の個数	2個	1個	0個

3章

2次関数

練習
26

教 p.103

次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。

(1) $x^2+3x-5=0$

(2) $3x^2-5x+4=0$

(3) $3x^2+2\sqrt{3}x+1=0$

指針 2次方程式の実数解の個数 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数は、判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって決まる。

$$D>0 \Leftrightarrow 2 \text{ 個}$$

$$D=0 \Leftrightarrow 1 \text{ 個}$$

$$D<0 \Leftrightarrow 0 \text{ 個}$$

解答 2次方程式の判別式を D とする。

(1) $D=3^2-4\cdot 1\cdot (-5)=29>0$

$$\leftarrow D>0 \Leftrightarrow \text{実数解 2 個}$$

であるから、実数解の個数は 2 個 答

(2) $D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 4=-23<0$

$$\leftarrow D<0 \Leftrightarrow \text{実数解 0 個}$$

であるから、実数解の個数は 0 個 答

(3) $D=(2\sqrt{3})^2-4\cdot 3\cdot 1=0$

$$\leftarrow D=0 \Leftrightarrow \text{実数解 1 個}$$

であるから、実数解の個数は 1 個 答

練習
27

2 次方程式 $x^2 - 4x + m + 8 = 0$ が実数解をもたないとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

指針 2 次方程式の実数解と判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号

実数解をもたないための条件は $D < 0$

x の係数が -4 (2 の倍数) であるから、 $\frac{D}{4} < 0$ から求めてもよい。

解答 2 次方程式 $x^2 - 4x + m + 8 = 0$ の判別式を D とする。

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 8) = -4(m + 4)$$

2 次方程式が実数解をもたないのは $D < 0$ のときであるから

$$-4(m + 4) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad m > -4 \quad \text{答}$$

別解 2 次方程式 $x^2 - 4x + m + 8 = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot (m + 8) = -m - 4$$

2 次方程式が実数解をもたないのは $D < 0$ のときであるから、 $\frac{D}{4} < 0$ より

$$-m - 4 < 0 \quad \text{これを解いて} \quad m > -4 \quad \text{答}$$

練習
28

2 次方程式 $x^2 + (m + 2)x + m + 5 = 0$ が重解をもつとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの重解を求めよ。

指針 実数解の個数による定数の決定

2 次方程式が重解をもつとき $D = 0$ で、実数解は $x = -\frac{b}{2a}$ である。

解答 この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (m + 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 5) = m^2 - 16$$

2 次方程式が重解をもつのは $D = 0$ のときであるから

$$m^2 - 16 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad m = \pm 4$$

また、重解は $x = -\frac{m+2}{2}$ である。

$$\leftarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$m = -4 \text{ のとき} \quad x = 1$$

$$m = 4 \text{ のとき} \quad x = -3 \quad \text{答}$$

6 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

A 2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

まとめ

2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき、共有点の x 座標は、 $y=0$ となる x の値、すなわち 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である。

とくに、2次関数のグラフと x 軸の共有点がただ1つのとき、グラフは x 軸に接するといい、その共有点を x 軸との接点という。

x 軸との接点は、放物線の頂点でもある。

3章

2次関数

練習
29

教 p.106

次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。また、グラフが x 軸に接するものはどれか。

(1) $y=x^2-2x-3$

(2) $y=-x^2+3x-1$

(3) $y=2x^2+4x+2$

(4) $y=2x^2-5x-3$

指針 2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ場合は、共有点の x 座標は 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である。グラフが x 軸に接するときは、2次方程式の解は重解になり、共有点はただ1つである。

解答 (1) このグラフと x 軸の共有点の x 座標は、2次方程式

$$x^2-2x-3=0 \text{ の実数解である。}$$

$$\text{これを解くと } (x+1)(x-3)=0 \text{ から } x=-1, 3$$

よって、共有点の座標は $(-1, 0), (3, 0)$ **答**

(2) このグラフと x 軸の共有点の x 座標は 2次方程式

$$-x^2+3x-1=0 \text{ すなわち } x^2-3x+1=0 \text{ の実数解である。}$$

$$\text{これを解くと } x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって、共有点の座標は $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ **答**

(3) このグラフと x 軸の共有点の x 座標は 2次方程式

$$2x^2+4x+2=0 \text{ すなわち } x^2+2x+1=0 \text{ の実数解である。}$$

$$\text{これを解くと } (x+1)^2=0 \text{ から } x=-1$$

よって、共有点の座標は $(-1, 0)$ **答**

(4) このグラフと x 軸の共有点の x 座標は 2 次方程式

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \text{ の実数解である。}$$

これを解くと $(x-3)(2x+1)=0$ から

$$x=3, -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} \leftarrow \begin{array}{ccc} 1 & -3 & \rightarrow -6 \\ 2 & 1 & \rightarrow 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{array} \end{array}$$

よって、共有点の座標は $(3, 0), (-\frac{1}{2}, 0)$ 答

グラフが x 軸に接するものは、共有点がただ 1 つのものであるから、(3) である。 答 (3)

B 2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

まとめ

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の個数と 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数は一致し、 $D=b^2-4ac$ の符号によって次のように分類される。

$D=b^2-4ac$ の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$ のとき			
$a<0$ のとき			
x 軸との 位置関係	異なる 2 点で 交わる	接する	共有点をもたない
x 軸との 共有点の個数	2 個	1 個	0 個
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	ない

練習
30次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y = x^2 + 3x + 3$ (2) $y = -2x^2 + 5x + 1$

(3) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

教 p.108

指針 2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号で調べる。

$$D > 0 \Leftrightarrow 2 \text{ 個} \quad D = 0 \Leftrightarrow 1 \text{ 個} \quad D < 0 \Leftrightarrow 0 \text{ 個}$$

解答 2次関数において、(右辺)=0とした2次方程式の判別式を D とする。

$$(1) D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0 \quad \leftarrow D < 0 \Leftrightarrow \text{共有点} 0 \text{ 個}$$

よって、共有点の個数は 0 個 答

$$(2) D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 33 > 0 \quad \leftarrow D > 0 \Leftrightarrow \text{共有点} 2 \text{ 個}$$

よって、共有点の個数は 2 個 答

$$(3) D = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 0 \quad \leftarrow D = 0 \Leftrightarrow \text{共有点} 1 \text{ 個}$$

よって、共有点の個数は 1 個 答

3
章2
次
関
数練習
31

2次関数 $y = x^2 - 2x - m - 1$ のグラフと x 軸の共有点の個数は、定数 m の値によってどのように変わるか。

教 p.108

指針 2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数 $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ の判別式を D として、 $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ のときで場合分けをする。

解答 2次方程式 $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m - 1) = 4(m + 2)$$

$$D > 0 \text{ となるのは } m > -2$$

$$D = 0 \text{ となるのは } m = -2$$

$$D < 0 \text{ となるのは } m < -2$$

よって、グラフと x 軸の共有点の個数は

$$m > -2 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$m = -2 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$m < -2 \text{ のとき } 0 \text{ 個 答}$$

発展 放物線と直線の共有点

まとめ

放物線と直線の共有点の x 座標

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が共有点をもつとき、その点の x 座標は、2 次方程式

$$ax^2+bx+c=mx+n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の実数解である。

2 次方程式 $\textcircled{1}$ が重解をもつとき、放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ はただ 1 つの共有点をもつ。このとき、放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ は接する といひ、ただ 1 つの共有点を 接点 といひ。

練習
1

教 p.109

放物線 $y=x^2-6x+10$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=2x-5$

(2) $y=-2x+6$

指針 放物線と直線の共有点の座標 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が共有点をもつとき、その点の x 座標は 2 次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の実数解である。

解答 (1) $x^2-6x+10=2x-5$

式を整理すると $x^2-8x+15=0$

因数分解すると $(x-3)(x-5)=0$

よって $x=3, 5$

$y=2x-5$ に代入すると

$x=3$ のとき $y=6-5=1$

$x=5$ のとき $y=10-5=5$

よって、共有点の座標は $(3, 1), (5, 5)$ 答

(2) $x^2-6x+10=-2x+6$

式を整理すると $x^2-4x+4=0$

因数分解すると $(x-2)^2=0$

よって $x=2$

$y=-2x+6$ に代入すると $y=-2 \cdot 2+6=2$

よって、共有点の座標は $(2, 2)$ 答

練習
2

放物線 $y=x^2-3x$ と直線 $y=x+k$ が接するとき、定数 k の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

指針 放物線と直線が接する条件 放物線と直線が接するのは、放物線と直線の方程式から y を消去して得られる 2 次方程式において、判別式 D が $D=0$ となるときである。

解答 $y=x^2-3x$ と $y=x+k$ から y を消去すると

$$x^2-3x=x+k$$

$$\text{すなわち } x^2-4x-k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-4)^2-4 \cdot 1 \cdot (-k)=4(k+4)$$

放物線 $y=x^2-3x$ と直線 $y=x+k$ が接するのは、 $D=0$ のときであるから

$$4(k+4)=0$$

$$\text{これを解いて } k=-4 \quad \text{答}$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0 \text{ から } x=2$$

$$\text{このとき } y=x+k=2+(-4)=-2$$

$$\text{よって、求める接点の座標は } (2, -2) \quad \text{答}$$

7 2 次不等式

A 1 次不等式と 1 次関数

まとめ

1 次不等式と 1 次関数のグラフ

1 次不等式 $ax+b>0$ の解は、1 次関数 $y=ax+b$ のグラフが x 軸よりも上側にあるような x の値の範囲である。また、1 次不等式 $ax+b<0$ の解は、1 次関数 $y=ax+b$ のグラフが x 軸よりも下側にあるような x の値の範囲である。

練習
32

1 次関数のグラフを利用して、次の 1 次不等式の解を求めよ。

$$(1) \quad 2x+4<0$$

$$(2) \quad -3x+6\leq 0$$

指針 1 次不等式と 1 次関数のグラフ 1 次関数 $y=ax+b$ のグラフをかき, x 軸より上側か下側かで分けて考える。

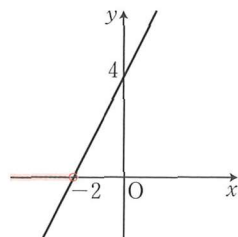
解答 (1) 1 次関数 $y=2x+4$ のグラフは, 右の図のような直線である。

この直線と x 軸の交点の x 座標は, 1 次方程式 $2x+4=0$ の解 $x=-2$ である。

右の図から, $y=2x+4$ について $y<0$ となる x の値の範囲は $x<-2$

よって, 求める 1 次不等式の解は

$$x<-2 \quad \text{答}$$



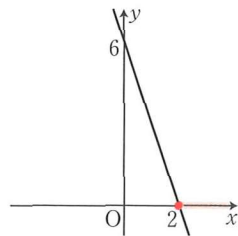
(2) 1 次関数 $y=-3x+6$ のグラフは, 右の図のような直線である。

この直線と x 軸の交点の x 座標は, 1 次方程式 $-3x+6=0$ の解 $x=2$ である。

右の図から, $y=-3x+6$ について $y\leq 0$ となる x の値の範囲は $x\geq 2$

よって, 求める 1 次不等式の解は

$$x\geq 2 \quad \text{答}$$



B 2 次不等式と 2 次関数

まとめ

1 2 次不等式

不等式のすべての項を左辺に移項して整理したとき

$$ax^2+bx+c>0, \quad ax^2+bx+c\leq 0$$

などのように, 左辺が x の 2 次式になる不等式を x の 2 次不等式という。ただし, $a\neq 0$ とする。

2 2 次不等式と 2 次関数

2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は, 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲である。

また, 2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は, 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフで $y<0$ となる x の値の範囲である。

2 次関数のグラフが異なる 2 点で交わる場合の不等式

次の手順にしたがって解く。

2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$ において, $a>0$ とする。

1 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を求める。

① 左辺を因数分解する。

→ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ から $x=\alpha, \beta$ ($\alpha<\beta$)

② 左辺が因数分解できないときは, 解の公式を利用する。

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (b^2 - 4ac > 0, \alpha < \beta)$$

2 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフをかく。 x 軸との交点の x 座標が α, β ($\alpha<\beta$) である。



3 $ax^2+bx+c>0$, $\alpha<\beta$ のとき

$y>0$ となる x の値の範囲を求める。

→ $x<\alpha, \beta<x$

$ax^2+bx+c<0$, $\alpha<\beta$ のとき

$y<0$ となる x の値の範囲を求める。

→ $\alpha<x<\beta$

練習 33

次の 2 次不等式を解け。

(1) $(x-1)(x-3)>0$

(2) $(x+2)(x-5)<0$

(3) $x(x+1)\leq 0$

(4) $x^2-x-2\geq 0$

(5) $x^2+5x+6>0$

(6) $x^2\leq 9$

教 p.113

指針 左辺が因数分解された形の 2 次不等式の解 2 次関数

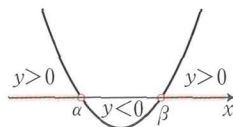
$y=(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha<\beta$) のグラフは右の図のようになる。

このとき, 2 次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ の解は

$$x<\alpha, \beta<x$$

2 次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は

$$\alpha<x<\beta$$



解答 (1) $(x-1)(x-3)=0$ を解くと $x=1, 3$

$y=(x-1)(x-3)$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲を求めて

$$x<1, 3<x \quad \text{答}$$

(2) $(x+2)(x-5)=0$ を解くと $x=-2, 5$

$y=(x+2)(x-5)$ のグラフで $y<0$ となる x の値の範囲を求めて

$$-2<x<5 \quad \text{答}$$

(3) $x(x+1)=0$ を解くと $x=-1, 0$

$y=x(x+1)$ のグラフで $y\leq 0$ となる x の値の範囲を求めて

$$-1\leq x\leq 0 \quad \text{答}$$

(4) $x^2-x-2=0$ を解く。

$$(x+1)(x-2)=0 \text{ から } x=-1, 2$$

$y=x^2-x-2$ のグラフで $y\geq 0$ となる x の値の範囲を求めて

$$x\leq -1, 2\leq x \quad \text{答}$$

(5) $x^2+5x+6=0$ を解く。

$$(x+3)(x+2)=0 \text{ から } x=-3, -2$$

$y=x^2+5x+6$ のグラフで $y>0$ となる x の値の範囲を求めて

$$x<-3, -2<x \quad \text{答}$$

(6) $x^2\leq 9$ から $x^2-9\leq 0$

$$(x+3)(x-3)=0 \text{ から } x=-3, 3$$

$y=x^2-9$ のグラフで $y\leq 0$ となる x の値の範囲を求めて

$$-3\leq x\leq 3 \quad \text{答}$$

練習
34

次の2次不等式を解け。

$$(1) 2x^2-5x+2\geq 0$$

$$(2) 2x^2+5x+3<0$$

$$(3) x^2+2x-1\leq 0$$

$$(4) x^2-5>0$$

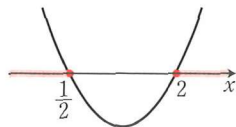
指針 2次不等式の解き方 (左辺) $=0$ の方程式を解き、グラフを利用して解く。

解答 (1) $2x^2-5x+2=0$ を解くと

$$(x-2)(2x-1)=0 \text{ から } x=2, \frac{1}{2}$$

よって、 $2x^2-5x+2\geq 0$ の解は

$$x\leq \frac{1}{2}, 2\leq x \quad \text{答}$$

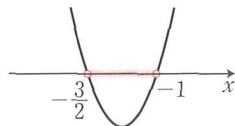


(2) $2x^2+5x+3=0$ を解くと

$$(x+1)(2x+3)=0 \text{ から } x=-1, -\frac{3}{2}$$

よって, $2x^2+5x+3<0$ の解は

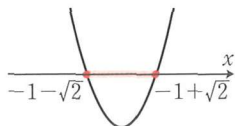
$$-\frac{3}{2}<x<-1 \quad \text{答}$$

(3) $x^2+2x-1=0$ を解くと

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

よって, $x^2+2x-1 \leq 0$ の解は

$$-1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2} \quad \text{答}$$

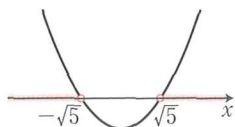
(4) $x^2-5=0$ を解くと

$$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0 \text{ から}$$

$$x = -\sqrt{5}, \sqrt{5}$$

よって, $x^2-5>0$ の解は

$$x < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < x \quad \text{答}$$



3 章

2 次関数

練習
35

教 p.115

次の 2 次不等式を解け。

(1) $-2x^2+x+1<0$

(2) $-3x^2+5x-1 \geq 0$

指針 2 次不等式の解き方 x^2 の係数が負の 2 次不等式は, 両辺に -1 を掛けて, 2 次の係数を正の数にして解く。

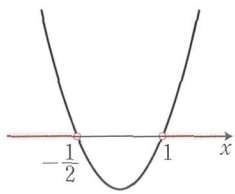
解答 (1) 両辺に -1 を掛けると $2x^2-x-1>0$

$$2x^2-x-1=0 \text{ を解くと}$$

$$(2x+1)(x-1)=0 \text{ から } x = -\frac{1}{2}, 1$$

よって, $-2x^2+x+1<0$ の解は

$$x < -\frac{1}{2}, 1 < x \quad \text{答}$$

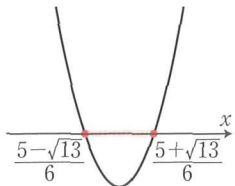
(2) 両辺に -1 を掛けると $3x^2-5x+1 \leq 0$

$$3x^2-5x+1=0 \text{ を解くと}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

よって, $-3x^2+5x-1 \geq 0$ の解は

$$\frac{5-\sqrt{13}}{6} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{13}}{6} \quad \text{答}$$



2次関数のグラフが x 軸と異なる2点で交わらない場合の不等式 $a > 0$ とする。[1] 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸に接する場合2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は重解 $x = \alpha$ をもつ $ax^2 + bx + c > 0$ の解は α 以外のすべての実数 $ax^2 + bx + c \geq 0$ の解は すべての実数 $ax^2 + bx + c < 0$ の解は ない $ax^2 + bx + c \leq 0$ の解は $x = \alpha$ [2] 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と共有点をもたない場合2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は解をもたない
$$\left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c \geq 0 \end{array} \right\} \text{の解は すべての実数}$$
$$\left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \end{array} \right\} \text{の解は ない}$$
練習
36

教 p.115

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 4x + 4 > 0$

(2) $x^2 - 10x + 25 < 0$

(3) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

(4) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$

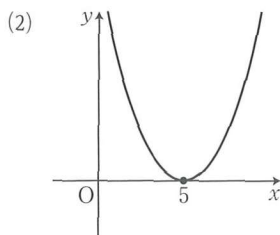
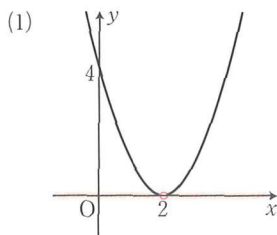
指針 解の範囲が特別な2次不等式 2次関数のグラフを参考にする。

解答 (1) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ であるから、関数 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフは、次ページの図のように x 軸と点 $(2, 0)$ で接する。よって、 $x^2 - 4x + 4 > 0$ の解は

2 以外のすべての実数 答

(2) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$ であるから、関数 $y = x^2 - 10x + 25$ のグラフは、次ページの図のように x 軸と点 $(5, 0)$ で接する。よって、 $x^2 - 10x + 25 < 0$ の解は

ない 答



- (3) $x^2+6x+9=(x+3)^2$ であるから、関数 $y=x^2+6x+9$ のグラフは、下の図のように x 軸と点 $(-3, 0)$ で接する。

よって、 $x^2+6x+9 \leq 0$ の解は

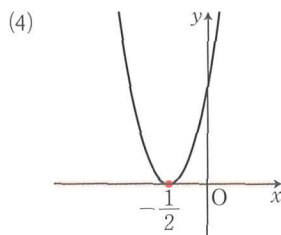
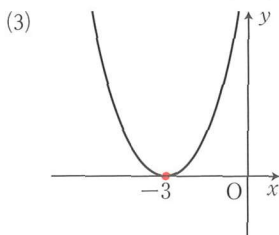
$$x = -3 \quad \text{答}$$

- (4) $4x^2+4x+1=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ であるから、関数 $y=4x^2+4x+1$ のグラフは、

下の図のように x 軸と点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ で接する。

よって、 $4x^2+4x+1 \geq 0$ の解は

すべての実数 $\quad \text{答}$



練習 37

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2-4x+6 > 0$

(2) $x^2-2x+2 \leq 0$

(3) $2x^2+4x+3 < 0$

(4) $2x^2+8x+10 \geq 0$

指針 解の範囲が特別な2次不等式 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係を調べ、解を求める。

解答 (1) $x^2-4x+6=(x-2)^2+2$ であるから、関数 $y=x^2-4x+6$ のグラフは、次ページの図のように x 軸より上側にあり、 x 軸と共有点をもたない。

よって、 $x^2-4x+6 > 0$ の解は

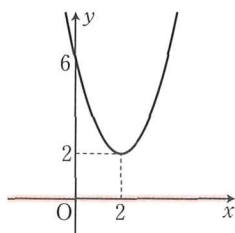
すべての実数 $\quad \text{答}$

- (2) $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ であるから、関数 $y=x^2-2x+2$ のグラフは、下の図のように x 軸より上側にあり、 x 軸と共有点をもたない。

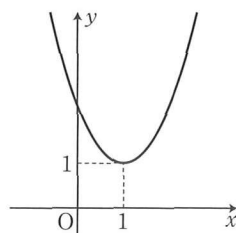
よって、 $x^2-2x+2 \leq 0$ の解は

ない 答

(1)



(2)



- (3) $2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$ であるから、関数 $y=2x^2+4x+3$ のグラフは、下の図のように x 軸より上側にあり、 x 軸と共有点をもたない。

よって、 $2x^2+4x+3 < 0$ の解は

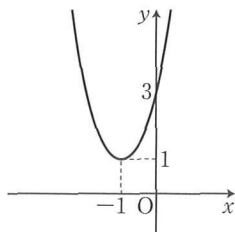
ない 答

- (4) $2x^2+8x+10=2(x+2)^2+2$ であるから、関数 $y=2x^2+8x+10$ のグラフは、下の図のように x 軸より上側にあり、 x 軸と共有点をもたない。

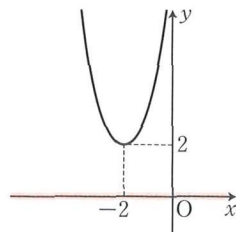
よって、 $2x^2+8x+10 \geq 0$ の解は

すべての実数 答

(3)



(4)



C 2次不等式の解き方のまとめ

まとめ

2次不等式の解についてのまとめ

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係および、2次方程式・2次不等式の解について、次のようにまとめられる。

$a>0$ の場合

$D=b^2-4ac$ の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸 の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\alpha, \beta$	$x=\alpha$	ない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha, \beta<x$	α 以外の すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c\geq 0$ の解	$x\leq \alpha, \beta\leq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	ない	ない
$ax^2+bx+c\leq 0$ の解	$\alpha\leq x\leq \beta$	$x=\alpha$	ない

3章

2次関数

練習
38

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2-3x+5>0$

(2) $-x^2+x-1\geq 0$

(3) $3x^2-2\sqrt{3}x+1\leq 0$

(4) $x^2-3x+2>2x^2-x$

教 p.117

指針 2次不等式の解 まず2次方程式について判別式 D の符号を調べ、グラフと x 軸の位置関係を求める。ただし、 x^2 の係数が負のときは両辺に -1 を掛けて、 x^2 の係数を正にしてから考える。

解答 2次方程式の判別式を D とする。

- (1) 2次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ について

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$

x^2 の係数が正であるから、 $x^2 - 3x + 5 > 0$ の解は

すべての実数 **答**

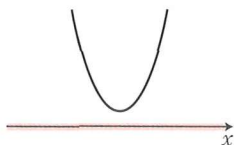
- (2) 両辺に -1 を掛けると $x^2 - x + 1 \leq 0$

2次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ について

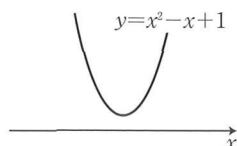
$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

x^2 の係数が正であるから、この2次不等式の解は **ない 答**

(1)



(2)



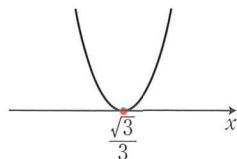
- (3) 2次方程式 $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ について

$$D = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 0$$

よって、 $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ の実数解は存在する。

解の公式により

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$



したがって、この2次不等式の解は

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{答}$$

- (4) 移項して整理すると $-x^2 - 2x + 2 > 0$

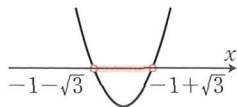
両辺に -1 を掛けると $x^2 + 2x - 2 < 0$

2次方程式 $x^2 + 2x - 2 = 0$ について

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12 > 0$$

よって、 $x^2 + 2x - 2 = 0$ の実数解は存在して

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-2)}}{1} = -1 \pm \sqrt{3}$$



したがって、この2次不等式の解は

$$-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3} \quad \text{答}$$

D 2次不等式の応用

まとめ

2次方程式が実数解をもつ条件

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の有無は判別式 D の符号でわかる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{異なる2つの実数解をもつ} \\ \text{重解をもつ} \\ \text{実数解をもたない} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow D > 0 \\ \Leftrightarrow D = 0 \\ \Leftrightarrow D < 0 \end{array} \quad \text{実数解をもつ} \Leftrightarrow D \geq 0$$

3章

2次関数

練習
39

教 p.118

2次関数 $y=x^2+2mx+3$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

指針 2次関数のグラフが x 軸と共有点をもつ条件 2次方程式の実数解の個数に着目する。

解答 2次方程式 $x^2+2mx+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = m^2 - 1 \cdot 3 = m^2 - 3$$

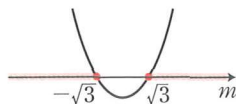
2次関数のグラフと x 軸が共有点をもつのは $D \geq 0$ のときであるから、

$$\frac{D}{4} \geq 0 \text{ より } m^2 - 3 \geq 0$$

$$m^2 - 3 = 0 \text{ を解くと } m = \pm\sqrt{3}$$

よって、求める m の値の範囲は

$$m \leq -\sqrt{3}, \sqrt{3} \leq m \quad \text{答}$$



教 p.118

ポイント

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の値の符号が一定になる場合を、2次方程式の判別式を利用して調べることができる理由について、次の言葉を使って説明してみよう。

「2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式」, 「2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ」

指針 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の値の符号が一定になるとは、 y の値が常に正か常に負であるということである。すなわち、 $ax^2+bx+c=0$ にはならないから、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもたない、ということになる。また、2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の値が、常に正か常に負になるのは、2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフがどうなるときか、を考える。

解答 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の値の符号が一定になる場合、 $ax^2+bx+c=0$ にはならないということであるから、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数解をも

たない。

すなわち、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると $D<0$

このとき、2次関数 $y=ax^2+bx+c$ について、 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$ であり

$a>0$ ならば、 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ 、 $-\frac{D}{4a}>0$ であるから $y>0$ 、すなわち

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは常に x 軸より上側にある。

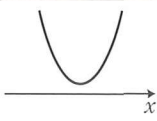
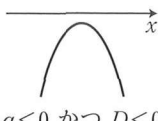
$a<0$ ならば、 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leq 0$ 、 $-\frac{D}{4a}<0$ であるから $y<0$ 、すなわち

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは常に x 軸より下側にある。 答

まとめ

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の値の符号

$D=b^2-4ac$ とする。

常に $ax^2+bx+c>0$	常に $ax^2+bx+c<0$
 $a>0$ かつ $D<0$	 $a<0$ かつ $D<0$

練習 40

教 p.119

2次不等式 $-x^2+mx+m<0$ の解がすべての実数であるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

指針 $ax^2+bx+c<0$ が常に成り立つ条件 2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解がすべての実数であるための条件は、 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると $a<0$ かつ $D<0$

解答 2次方程式 $-x^2+mx+m=0$ の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot(-1)\cdot m=m^2+4m$$

2次不等式の x^2 の係数が負であるから、 $D<0$ であればよい。

$$m^2+4m<0 \text{ から } m(m+4)<0$$

これを解いて $-4<m<0$ 答



E 連立不等式

教 p.119

練習
41

次の連立不等式を解け。

$$(1) \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + x > 0 \\ 3x^2 + 5x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

指針 連立不等式の解き方 まず、それぞれの不等式を解き、その解の共通範囲を求める。このとき、数直線を利用するとわかりやすい。

解答 (1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - 2x - 3 > 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

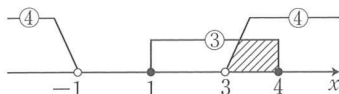
① から $(x-1)(x-4) \leq 0$ よって $1 \leq x \leq 4$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$

② から $(x+1)(x-3) > 0$

よって $x < -1, 3 < x$ $\cdots \cdots \textcircled{4}$

③, ④ の共通範囲を求めて

$3 < x \leq 4$ 答



(2) $\begin{cases} x^2 + x > 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x^2 + 5x - 2 \leq 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

① から $x(x+1) > 0$

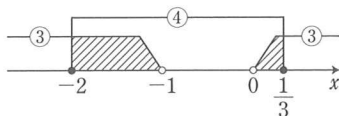
よって $x < -1, 0 < x$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$

② から $(x+2)(3x-1) \leq 0$

よって $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ $\cdots \cdots \textcircled{4}$

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-2 \leq x < -1, 0 < x \leq \frac{1}{3}$ 答

3
章2
次
関
数練習
42

次の不等式を解け。

$$(1) -2 \leq x^2 + 3x \leq 4$$

$$(2) 5 < x^2 - 4x \leq 6 - 3x$$

教 p.120

指針 連立不等式の解き方 $A < B < C$ の形の不等式は、連立不等式 $A < B$ かつ $B < C$ に直す。

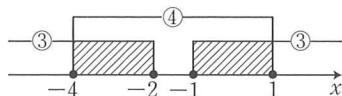
解答 (1) 不等式 $-2 \leq x^2 + 3x \leq 4$ から

$$\begin{cases} -2 \leq x^2 + 3x & \text{すなわち} & x^2 + 3x + 2 \geq 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + 3x \leq 4 & & x^2 + 3x - 4 \leq 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① から $(x+2)(x+1) \geq 0$ よって $x \leq -2, -1 \leq x$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$

② から $(x+4)(x-1) \leq 0$
 よって $-4 \leq x \leq 1$ …… ④

③ と ④ の共通範囲を求めて
 $-4 \leq x \leq -2, -1 \leq x \leq 1$ 答



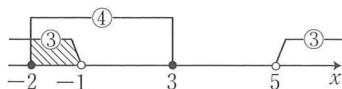
(2) 不等式 $5 < x^2 - 4x \leq 6 - 3x$ から

$$\begin{cases} 5 < x^2 - 4x \\ x^2 - 4x \leq 6 - 3x \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \quad \dots\dots ① \\ x^2 - x - 6 \leq 0 \quad \dots\dots ② \end{cases}$$

① から $(x+1)(x-5) > 0$ よって $x < -1, 5 < x$ …… ③

② から $(x+2)(x-3) \leq 0$
 よって $-2 \leq x \leq 3$ …… ④

③ と ④ の共通範囲を求めて
 $-2 \leq x < -1$ 答



まとめ

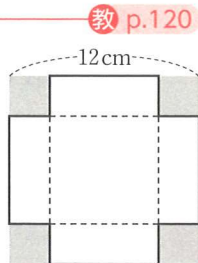
連立不等式の文章題

次の①～④の手順で進める。

- ① 変数 (x) を適当に定め、その変域を求める。
- ② 変数 (x) を用いて、条件を式に表す。
- ③ 連立不等式を解く (それぞれの不等式を解き、その解の共通範囲を求める。このとき、数直線を用いるとわかりやすい)。
- ④ 単位がある場合は忘れずにつける。

練習 43

1 辺が 12 cm の正方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から合同な正方形を切り取り、ふたのない箱を作る。底面の正方形の 1 辺が 6 cm 以上で、側面の 4 個の長方形の面積の和を 40 cm^2 以上にするとき、切り取る正方形の 1 辺の長さをどのような範囲にとればよいか。



教 p.120

指針 連立不等式の応用問題 切り取る正方形の 1 辺の長さを $x \text{ cm}$ とし、「底面の正方形の 1 辺が 6 cm 以上で、側面の長方形の面積の和を 40 cm^2 以上にする」から不等式を作る。 x のとる値の範囲に注意する。

解答 切り取る正方形の 1 辺の長さを $x \text{ cm}$ ($x > 0$) とすると、箱の底面の正方形の 1 辺の長さは $(12 - 2x) \text{ cm}$ である。

底面の正方形の 1 辺は 6 cm 以上であるから

$$12 - 2x \geq 6 \quad \text{これを解いて} \quad x \leq 3$$

よって $0 < x \leq 3$ …… ①

側面の長方形の面積の和は 40 cm^2 以上であるから

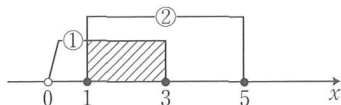
$$4x(12-2x) \geq 40 \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

これを解くと $(x-1)(x-5) \leq 0$ から $1 \leq x \leq 5$ …… ②

①と②の共通範囲を求めて

$$1 \leq x \leq 3$$

答 1 cm 以上 3 cm 以下



練習
44

2次関数 $y = x^2 + 2mx + m + 6$ のグラフと x 軸の負の部分で、異なる2点で交わる時、定数 m の値の範囲を求めよ。

教 p.121

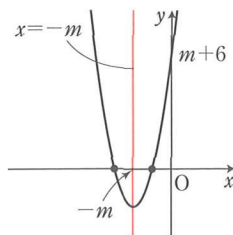
指針 2次関数のグラフと x 軸の交点 グラフの軸の位置や y 軸との交点の位置などに着目する。

解答 関数の式を変形すると

$$y = (x+m)^2 - m^2 + m + 6$$

グラフは下に凸の放物線で、その軸は直線 $x = -m$ である。

グラフと x 軸の負の部分で、異なる2点で交わるのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。



[1] グラフと x 軸が異なる2点で交わる。

[2] グラフの軸が y 軸より左側にある。

[3] グラフと y 軸の交点の y 座標が正である。

[1] から、2次方程式 $x^2 + 2mx + m + 6 = 0$ の判別式を D とすると、 $D > 0$ である。

$$D = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+6) = 4(m^2 - m - 6)$$

よって $m^2 - m - 6 > 0$

$$\text{すなわち } (m+2)(m-3) > 0$$

これを解くと $m < -2, 3 < m$ …… ①

[2] から $-m < 0$ よって $m > 0$ …… ②

[3] から $m+6 > 0$ よって $m > -6$ …… ③

①, ②, ③の共通範囲を求めて $m > 3$ 答

3
章

2
次
関
数

コラム 2 次関数のグラフと x 軸の交点の条件

練習

教 p.122

教科書応用例題 10 の 2 次関数 $y=x^2-2mx-m+6$ のグラフについて、次の状況

条件 [3] 「グラフと y 軸の交点の y 座標が正である」と「軸が y 軸の左側にある」、さらに、条件 [1] 「グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。」

であるとき、グラフと x 軸の交点について、どのようなことがいえるか答えてみよう。

解答 異なる 2 つの共有点をもち、 x 座標がともに負である。

あるいは

グラフと x 軸の負の部分が異なる 2 点で交わる。

など。 **答**

研究 絶対値を含む関数のグラフ

まとめ

絶対値を含む関数のグラフ

関数 $y=|f(x)|$ のグラフは、関数 $y=f(x)$ のグラフで x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返して得られる。

練習 1

教 p.123

次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=|x+2|$

(2) $y=|x^2-1|$

(3) $y=|x^2-2x-3|$

指針 絶対値を含む関数のグラフ 絶対値記号の中の正負によって場合分けをする。
 $y=|f(x)|$ のグラフは、 $y=f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称に折り返したグラフになる。

解答 (1) $x+2 \geq 0$ すなわち

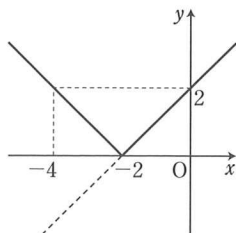
$$x \geq -2 \text{ のとき } y=x+2$$

$$x+2 < 0 \text{ すなわち}$$

$$x < -2 \text{ のとき } y=-x-2$$

よって、関数 $y=|x+2|$ のグラフは

右の図の実線部分。 **答**



(2) $x^2-1 \geq 0$ すなわち $x \leq -1, 1 \leq x$ のとき $y = x^2 - 1$

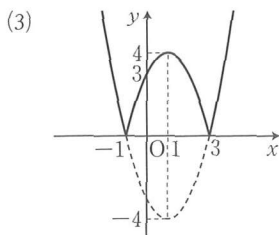
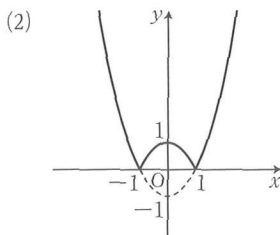
$x^2-1 < 0$ すなわち $-1 < x < 1$ のとき $y = -x^2 + 1$

よって、関数 $y = |x^2-1|$ のグラフは下の図の実線部分。 答

(3) $x^2-2x-3 \geq 0$ すなわち $x \leq -1, 3 \leq x$ のとき $y = x^2 - 2x - 3$

$x^2-2x-3 < 0$ すなわち $-1 < x < 3$ のとき $y = -x^2 + 2x + 3$

よって、関数 $y = |x^2-2x-3|$ のグラフは下の図の実線部分。 答



第3章 第3節

問題

教 p.124

- 13 放物線 $y = x^2 + 2x - 2$ は x 軸と2点で交わる。その交点を A, B とする。この放物線が x 軸から切り取る線分 AB の長さを求めよ。

指針 2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標 2次関数のグラフが x 軸と共有点をもつとき、共有点の x 座標は $y=0$ となる x の値である。

解答 $y = x^2 + 2x - 2$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は、2次方程式 $x^2 + 2x - 2 = 0$ の実数解である。

これを解くと $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-2)} = -1 \pm \sqrt{3}$

$A(-1 - \sqrt{3}, 0)$, $B(-1 + \sqrt{3}, 0)$ とすると

$AB = (-1 + \sqrt{3}) - (-1 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ 答

教 p.124

- 14 2次関数 $y = x^2 + mx - m + 3$ のグラフが x 軸に接するとき、定数 m の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

指針 2次関数のグラフが x 軸に接する条件 接点の x 座標は、 $y=0$ とおいた2次方程式の重解である。

解答 この2次方程式 $x^2 + mx - m + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m + 3) = m^2 + 4m - 12$$

2次関数 $y = x^2 + mx - m + 3$ のグラフが x 軸に接するのは、 $D=0$ のときであるから

$$m^2 + 4m - 12 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (m-2)(m+6) = 0$$

これ解いて $m = 2, -6$

2 次方程式 $x^2 + mx - m + 3 = 0$ の重解は $x = -\frac{m}{2}$ である。

よって、 $m = 2$ のとき $x = -\frac{2}{2} = -1$

$m = -6$ のとき $x = -\frac{-6}{2} = 3$

したがって、接点の座標は

$m = 2$ のとき $(-1, 0)$, $m = -6$ のとき $(3, 0)$ 答

教 p.124

15 次の 2 次不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(1) $2x^2 + x - 6 < 0$

(2) $4x - 2 \geq x^2$

指針 2 次不等式の整数解 2 次不等式を解いて、得られた x の値の範囲にある整数をすべて求める。

解答 (1) $2x^2 + x - 6 = 0$ を解くと

$$(x+2)(2x-3) = 0 \quad \text{から} \quad x = -2, \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow & 1 & \times & 2 & \rightarrow & 4 \\ & 2 & & -3 & & -3 \\ & 2 & & -6 & & 1 \end{array}$$

よって、 $2x^2 + x - 6 < 0$ の解は $-2 < x < \frac{3}{2}$

この不等式を満たす整数 x は $x = -1, 0, 1$ 答

(2) 移項すると $-x^2 + 4x - 2 \geq 0$

両辺に -1 を掛けると $x^2 - 4x + 2 \leq 0$

$x^2 - 4x + 2 = 0$ を解くと

$$x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

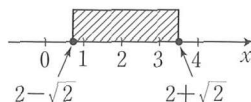
よって、2 次不等式の解は

$$2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$1 < \sqrt{2} < 2$ であるから

$$0 < 2 - \sqrt{2} < 1, \quad 3 < 2 + \sqrt{2} < 4$$

したがって、 $\textcircled{1}$ を満たす整数 x は $x = 1, 2, 3$ 答



教 p.124

16 2 次不等式 $ax^2 + 2x + 4a < 0$ の解がすべての実数であるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

指針 2 次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ の解がすべての実数になる条件

2 次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ の係数について $a < 0$ かつ $D < 0$ が成り立つとき、その解はすべての実数となる。

解答 2次方程式 $ax^2+2x+4a=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= 2^2 - 4 \cdot a \cdot 4a = -4(4a^2 - 1) \\ &= -4(2a+1)(2a-1) \end{aligned}$$

2次不等式 $ax^2+2x+4a < 0$ の解がすべての実数となるための条件は

$$a < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad D < 0$$

$$D < 0 \text{ から } (2a+1)(2a-1) > 0$$

$$\text{これを解いて } a < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } a < -\frac{1}{2} \quad \text{答}$$

教 p.124

- 17** ある速さで真上に打ち上げたボールの、打ち上げてから x 秒後の地上からの高さを h m とする。 h の値が $h = -5x^2 + 40x$ で与えられるとき、ボールが地上から 60 m 以上 75 m 以下の高さにあるのは、 x の値がどのような範囲にあるときか。

指針 連立不等式の応用 h のとる値の範囲から連立不等式を作る。

$A < B < C$ の形の連立不等式は、 $A < B$ かつ $B < C$ として解く。

解答 h の値が 60 m 以上 75 m 以下であるから

$$60 \leq -5x^2 + 40x \leq 75$$

$$\text{よって } \begin{cases} 60 \leq -5x^2 + 40x \\ -5x^2 + 40x \leq 75 \end{cases} \quad \text{すなわち } \begin{cases} x^2 - 8x + 12 \leq 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - 8x + 15 \geq 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } (x-2)(x-6) \leq 0$$

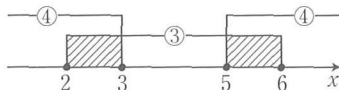
$$\text{よって } 2 \leq x \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } (x-3)(x-5) \geq 0$$

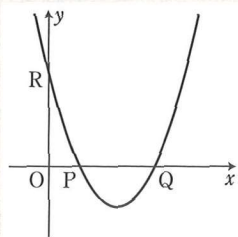
$$\text{よって } x \leq 3, 5 \leq x \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ の共通範囲を求めて

$$2 \leq x \leq 3, 5 \leq x \leq 6 \quad \text{答}$$



- 18 2次不等式 $ax^2+bx+c \leq 0$ の解が $\alpha \leq x \leq \beta$ (ただし, $\alpha \neq \beta$) であるとき, $\beta - \alpha$ をこの解の「幅」と呼ぶことにする。2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになるとき, 2次不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ の解の「幅」は, 右の図のある線分の長さとも一致する。



それは, 次の ①~④ のどの線分か。

- ① 線分 OP ② 線分 OQ
③ 線分 OR ④ 線分 PQ

指針 2次不等式の解の幅 図から, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は異なる2つの実数解をもち, それらを $x = \alpha, \beta$ とすると, 2次不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ の解は $\alpha \leq x \leq \beta$ と表される。

つまり, $\beta - \alpha$ は x 座標のみに関わるから, 図の x 軸上の点に着目する。

解答 点 P, Q の x 座標は, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の異なる2つの実数解

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ であり, これらを α, β ($\alpha < \beta$) とすると, 2次不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ の解は $\alpha \leq x \leq \beta$ である。

よって, 解の「幅」は $\beta - \alpha = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ であり, これは線分 PQ の長さを表す。

図 ④

第3章 章末問題 A

1. 放物線 $y = -2x^2 + 3x + 1$ を平行移動したものが, 2点 $(-2, 0)$, $(1, 12)$ を通るとき, その放物線の方程式を求めよ。

指針 放物線の方程式の決定 放物線 $y = -2x^2 + 3x + 1$ を平行移動しても, x^2 の係数は変わらない。すなわち $y = -2x^2 + bx + c$ の形に表される。

解答 求める方程式を $y = -2x^2 + bx + c$ とする。

グラフが2点 $(-2, 0)$, $(1, 12)$ を通るから

$$0 = -8 - 2b + c \quad \text{すなわち} \quad 2b - c = -8 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$12 = -2 + b + c \quad \text{すなわち} \quad b + c = 14 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{ から } 3b=6 \quad \text{よって } b=2$$

$$\text{これを } \textcircled{2} \text{ に代入して } 2+c=14 \quad \text{よって } c=12$$

$$\text{したがって } y=-2x^2+2x+12 \quad \text{答}$$

教 p.125

2. 次の2つの放物線の頂点が一致するとき、定数 a, b の値を求めよ。

$$y=2x^2+4x, \quad y=x^2+ax+b$$

指針 放物線の頂点が一致することによる係数の決定

2つの放物線の頂点の座標を求め、 x 座標、 y 座標がともに等しいとする。

解答 $y=2x^2+4x$ を変形すると $y=2(x+1)^2-2$

よって、この放物線の頂点の座標は $(-1, -2)$

また、 $y=x^2+ax+b$ を変形すると $y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

よって、この放物線の頂点の座標は $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}+b\right)$

2つの頂点が一致するから

$$-\frac{a}{2}=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -\frac{a^2}{4}+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ から $a=2$

これを $\textcircled{2}$ に代入して $-1+b=-2$ よって $b=-1$

したがって $a=2, b=-1$ 答

教 p.125

3. x の2次関数 $y=x^2-mx+m$ の最小値を k とする。

(1) k を m の式で表せ。

(2) k の値を最大にする m の値と、 k の最大値を求めよ。

指針 2次関数の最小値とその最大値

(1) $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する。 x の値に制限がないとき、 $a>0$ なら、 y は $x=p$ で最小値 q をとる。

(2) k は m についての2次式で表される。よって、 k は m についての2次関数になり、その最大値を求める。

解答 (1) $y=x^2-mx+m=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2+m$

$$=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m$$

よって、 y は $x=\frac{m}{2}$ で最小値 $-\frac{m^2}{4}+m$ をとる。

したがって $k=-\frac{m^2}{4}+m$ 答

3章

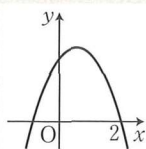
2次関数

$$\begin{aligned}
 (2) \quad k &= -\frac{1}{4}(m^2-4m) = -\frac{1}{4}\{(m-2)^2-2^2\} \\
 &= -\frac{1}{4}(m-2)^2+1
 \end{aligned}$$

よって、 k は $m=2$ で最大値 1 をとる。 答

教 p.125

4. 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき、次の値の符号を求めよ。



- (1) a (2) c (3) $-\frac{b}{2a}$ (4) b
 (5) b^2-4ac (6) $a+b+c$

指針 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと、 a 、 b 、 c の符号

- (1) $a>0$ のとき、下に凸。 $a<0$ のとき、上に凸。
 (2) $x=0$ とおくと、 $y=c$ であるから、グラフと y 軸の交点の y 座標の符号を調べればよい。
 (3) 頂点の x 座標は $x=-\frac{b}{2a}$ であり、これが正である。
 (4) (1)、(3) からわかる。
 (5) グラフが x 軸と異なる 2 点で交わっていることから考える。
 (6) $x=1$ とおくと、 $y=a+b+c$ であるから、 $x=1$ のときの y の値を考える。

解答 (1) グラフが上に凸であることから $a<0$ よって 負 答

(2) 図より、 $x=0$ において $y=c>0$ よって 正 答

(3) 頂点の x 座標 $-\frac{b}{2a}$ が正であるから $-\frac{b}{2a}>0$

よって 正 答

(4) (3) から $-\frac{b}{2a}>0$ (1) より、 $a<0$ であるから $b>0$

よって 正 答

(5) グラフが x 軸と異なる 2 点で交わっているから $b^2-4ac>0$

よって 正 答

(6) $x=1$ とおくと $y=a+b+c$

図より、 $x=1$ のとき $y>0$ であるから $a+b+c>0$

よって 正 答

教 p.125

5. 2 次不等式 $ax^2+bx+4>0$ の解が $-1<x<2$ となるように、定数 a 、 b の値を定めよ。

指針 2次不等式の解と係数決定 与えられた解が $-1 < x < 2$ であるから、 $a < 0$ であることがわかる。2次関数 $y = ax^2 + bx + 4$ のグラフが2点 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ を通ることから、定数 a 、 b の値を求める。

解答 2次不等式 $ax^2 + bx + 4 > 0$ の解が $-1 < x < 2$ となるのは、2次関数 $y = ax^2 + bx + 4$ のグラフが上に凸で、 x 軸と2点 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ で交わるときである。

$y = ax^2 + bx + 4$ において

$$x = -1 \text{ とすると } y = a - b + 4$$

$$x = 2 \text{ とすると } y = 4a + 2b + 4$$

よって、 a 、 b が満たすべき条件は

$$a < 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

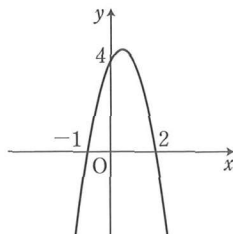
$$a - b + 4 = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$4a + 2b + 4 = 0 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

②、③を解いて $a = -2$ 、 $b = 2$

これは①を満たす。

したがって $a = -2$ 、 $b = 2$ **答**



3章

2次関数

教 p.125

6. a は定数とする。2次不等式 $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ を次の場合について解け。

(1) $a > 0$ のとき

(2) $a < 0$ のとき

指針 2次不等式の解 係数が文字であっても、2次不等式の解き方は同じである。

$$\alpha < \beta \text{ のとき } (x - \alpha)(x - \beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$$

$$x^2 - ax - 2a^2 < 0 \text{ の左辺を因数分解すると } (x + a)(x - 2a) < 0$$

そこで、 $-a$ と $2a$ の大小関係を調べて解を求める。

解答 $x^2 - ax - 2a^2 = (x + a)(x - 2a)$

よって $(x + a)(x - 2a) < 0$

(1) $a > 0$ のとき $-a < 2a$

よって、2次不等式 $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ の解は

$$-a < x < 2a \quad \text{答}$$

(2) $a < 0$ のとき $2a < -a$

よって、2次不等式 $x^2 - ax - 2a^2 < 0$ の解は

$$2a < x < -a \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow x^2 - ax - 2a^2 \\ &= x^2 + (a - 2a)x + a \cdot (-2a) \\ &= (x + a)(x - 2a) \end{aligned}$$

7. 次の2つの方程式がともに実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

$$x^2 + (a+1)x + a^2 = 0, \quad x^2 + 2ax + 2a = 0$$

指針 2つの方程式がともに実数解をもつ条件 2次方程式が実数解をもつ条件は、判別式を D とすると $D \geq 0$

したがって、2つの2次方程式の判別式をそれぞれ D_1, D_2 として、 $D_1 \geq 0$ かつ $D_2 \geq 0$ となるような定数 a の値の範囲を求める。

解答 2次方程式 $x^2 + (a+1)x + a^2 = 0, x^2 + 2ax + 2a = 0$ の判別式を、それぞれ D_1, D_2 とすると

$$D_1 = (a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a^2 = -3a^2 + 2a + 1$$

$$D_2 = (2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a = 4(a^2 - 2a)$$

ともに実数解をもつのは、 $D_1 \geq 0$ かつ $D_2 \geq 0$ のときである。

$$D_1 \geq 0 \text{ から } -3a^2 + 2a + 1 \geq 0$$

$$\text{よって } 3a^2 - 2a - 1 \leq 0$$

$$\text{すなわち } (a-1)(3a+1) \leq 0$$

$$\text{これを解いて } -\frac{1}{3} \leq a \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

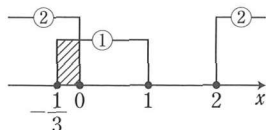
$$D_2 \geq 0 \text{ から } a^2 - 2a \geq 0$$

$$\text{すなわち } a(a-2) \geq 0$$

$$\text{これを解いて } a \leq 0, 2 \leq a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①と②の共通範囲を求めて

$$-\frac{1}{3} \leq a \leq 0 \quad \text{答}$$



8. 2次関数 $y = x^2 - 2ax + a$ において、 y の値が常に正であるように、定数 a の値の範囲を定めよ。

指針 2次関数の y の値が常に正となる条件 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ に対して、 y の値が常に正となるとき (最小値) > 0

解答 $y = x^2 - 2ax + a = (x-a)^2 - a^2 + a$

よって、 y は $x = a$ で最小値 $-a^2 + a$ をとる。

y は正の値しかとらないから $-a^2 + a > 0$

$$\text{これを解いて } a(a-1) < 0 \text{ から } 0 < a < 1 \quad \text{答}$$

別解 2次方程式 $x^2 - 2ax + a = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 4a(a-1)$$

2次関数 $y=x^2-2ax+a$ が正の値しかとらないとき、常に $x^2-2ax+a>0$ が成り立つ。

これが成り立つための条件は、 x^2 の係数が正であるから $D<0$

すなわち $4a(a-1)<0$

これを解いて $0<a<1$ 答

第3章 章末問題 B

教 p.126

3
章

2
次
関
数

9. 放物線 $y=2x^2-4x+5$ の頂点をPとする。次の問いに答えよ。

(1) x 軸に関して点Pと対称な点Qの座標を求めよ。

(2) この放物線と x 軸に関して対称な放物線の方程式を求めよ。

指針 2次関数のグラフを x 軸に関して対称移動

(1) 点 (s, t) と x 軸に関して対称な点の座標は $(s, -t)$ である。

(2) (1) より、 x 軸に関して対称な放物線の頂点の座標がわかるから、求める方程式は $y=a(x-p)^2+q$ の形に表される。また、 x 軸に関して対称であるから $a=-2$ である。

解答 (1) $y=2x^2-4x+5$
 $=2(x^2-2x)+5$
 $=2(x-1)^2+3$

頂点Pの座標は $(1, 3)$ であるから、

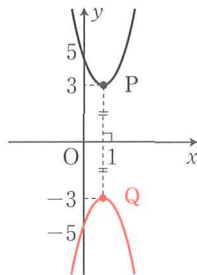
頂点Qの座標は $(1, -3)$ 答

(2) 2つの放物線は x 軸に関して対称であるから、
 求める放物線の方程式の2次の係数は -2 である。
 また、(1) から、求める放物線の頂点は
 $Q(1, -3)$ であるから

$$y=-2(x-1)^2-3 \quad \text{答}$$

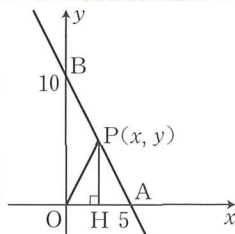
別解 (2) 右辺を計算して次のように答えてもよい。

$$y=-2x^2+4x-5 \quad \text{答}$$



10. 1 次関数 $y = -2x + 10$ のグラフが、 x 軸、 y 軸と交わる点を、それぞれ A、B とする。点 $P(x, y)$ が線分 AB 上を動くとき、次の問いに答えよ。

- (1) OP^2 を x で表せ。
 (2) 線分 OP の長さの最小値を求めよ。



指針 2 次関数の最大・最小の応用

- (1) $\triangle POH$ において、三平方の定理により $OP^2 = OH^2 + PH^2$
 (2) OP^2 が最小のとき、OP は最小となる。

解答 (1) 右の図の $\triangle POH$ において

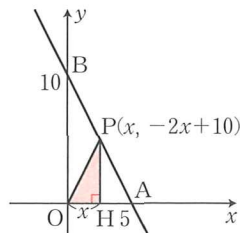
$$\begin{aligned} OP^2 &= OH^2 + PH^2 \\ &= x^2 + (-2x + 10)^2 \\ &= x^2 + 4x^2 - 40x + 100 \\ &= 5x^2 - 40x + 100 \quad \text{答} \end{aligned}$$

- (2) $OP^2 = 5(x^2 - 8x) + 100$
 $= 5(x - 4)^2 + 20$

定義域は $0 \leq x \leq 5$ であるから、 OP^2 は $x = 4$ で最小値 20 をとる。

OP^2 が最小のとき、線分 OP の長さは最小となる。

$OP^2 = 20$ から、 $OP > 0$ より $OP = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 答



11. a は定数とする。関数 $y = x^2 - 4x$ ($a \leq x \leq a + 2$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 最小値を求めよ。 (2) 最大値を求めよ。

指針 文字を含む定義域における 2 次関数の最大・最小 a の値で場合分けする。

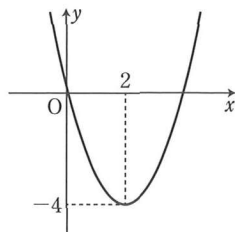
そして、頂点および定義域の端点の y 座標の大きさを比較して、(1) 最小値、(2) 最大値を求める。

解答 関数の式を変形すると

$$y = (x - 2)^2 - 4 \quad (a \leq x \leq a + 2)$$

- (1) [1] $a + 2 < 2$ すなわち $a < 0$ のとき
 $a \leq x \leq a + 2$ の範囲では、 y の値は減少する。
 よって、 y は $x = a + 2$ で最小値
 $(a + 2)^2 - 4(a + 2) = a^2 - 4$ をとる。

- [2] $a \leq 2 \leq a + 2$ すなわち $0 \leq a \leq 2$ のとき



$a \leq x \leq a+2$ の範囲に放物線の頂点を含むから、 y は $x=2$ で最小となる。
よって、 y は $x=2$ で最小値 -4 をとる。

[3] $2 < a$ のとき

$a \leq x \leq a+2$ の範囲では、 y の値は増加する。

よって、 y は $x=a$ で最小値 a^2-4a をとる。

答 $a < 0$ のとき $x=a+2$ で最小値 a^2-4

$0 \leq a \leq 2$ のとき $x=2$ で最小値 -4

$2 < a$ のとき $x=a$ で最小値 a^2-4a

(2) [1] $a+1 < 2$ すなわち $a < 1$ のとき

$a \leq x \leq a+2$ の範囲の中央 $a+1$ の値は、頂点の x 座標 2 よりも小さいから、 y は $x=a$ で最大となる。

よって、 y は $x=a$ で最大値 a^2-4a をとる。

[2] $a+1=2$ すなわち $a=1$ のとき

$a \leq x \leq a+2$ の範囲の中央 $a+1$ の値は、頂点の x 座標 2 に等しいから、 y は $x=a, a+2$ で最大となる。

よって、 y は $x=1, 3$ で最大値 -3 をとる。

[3] $2 < a+1$ すなわち $1 < a$ のとき

$a \leq x \leq a+2$ の範囲で中央 $a+1$ の値は、頂点の x 座標 2 よりも大きいから、 y は $x=a+2$ で最大となる。

よって、 y は $x=a+2$ で最大値 a^2-4 をとる。

答 $a < 1$ のとき $x=a$ で最大値 a^2-4a

$a=1$ のとき $x=1, 3$ で最大値 -3

$1 < a$ のとき $x=a+2$ で最大値 a^2-4

教 p.126

12. 2 次関数 $y=x^2-2x+m(1-m)$ について、 $0 \leq x \leq 3$ の範囲で y の値が常に負となるように、定数 m の値の範囲を定めよ。

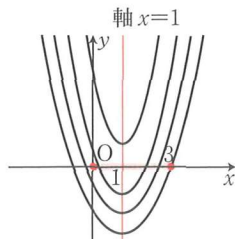
指針 関数が常に負となる条件 下に凸のグラフが、ある定義域の範囲内で常に x 軸より下側になるとき、定義域の両端で $y < 0$ である。

解答 $y=x^2-2x+m(1-m)$ を変形すると

$$y=(x-1)^2-m^2+m-1$$

よって、この 2 次関数のグラフの軸は直線 $x=1$ で、グラフは頂点の y 座標のとる値によって右の図ようになる。

グラフの軸から定義域の端点までは $x=0$ より $x=3$ の方が遠いから、 $x=3$ のとき $y < 0$ であればこの 2 次関数の y の値は $0 \leq x \leq 3$ の範囲で常に



負である。

$$\text{よって } (3-1)^2 - m^2 + m - 1 < 0$$

$$m^2 - m - 3 > 0$$

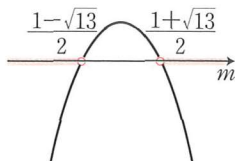
$m^2 - m - 3 = 0$ を解くと

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-3)}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

したがって、与えられた 2 次関数のグラフは右の

図のようになり、求める m の範囲は

$$m < \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \quad \frac{1 + \sqrt{13}}{2} < m \quad \text{答}$$



教 p.126

13. 2 次関数 $y = x^2 - 2mx + m - \frac{1}{2}$ のグラフは、定数 m の値に関係なく常に x 軸と共有点をもつことを示せ。

指針 関数のグラフが x 軸と共有点をもつ条件 2 次方程式 $x^2 - 2mx + m - \frac{1}{2} = 0$ の判別式を D とすると、 $D \geq 0$ のときグラフは常に x 軸と共有点をもつ。

解答 2 次方程式 $x^2 - 2mx + m - \frac{1}{2} = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right) \\ &= 4m^2 - 4m + 2 = 4\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

$D > 0$ であるから、2 次関数 $y = x^2 - 2mx + m - \frac{1}{2}$ のグラフは、定数 m の値に関係なく常に x 軸と共有点をもつ。 終

教 p.126

14. 2 次方程式 $x^2 - 2mx + m + 12 = 0$ が、次のような実数解をもつように、定数 m の値の範囲を定めよ。

- (1) 異なる 2 つの正の解 (2) 異なる 2 つの負の解
(3) 正の解と負の解

指針 2 次関数のグラフと x 軸の交点 $y = x^2 - 2mx + m + 12$ のグラフを考える。
グラフの軸の位置や y 軸との交点の位置に着目する。

(3) はグラフと y 軸の交点に着目する。

解答 $x^2 - 2mx + m + 12 = (x - m)^2 - m^2 + m + 12$

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + m + 12$ のグラフの頂点の座標は $(m, -m^2 + m + 12)$

(1) 方程式が異なる 2 つの実数解をもつとき、判別式 D は $D > 0$

$$\begin{aligned} \text{よって } D &= (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 12) \\ &= 4m^2 - 4m - 48 \\ &= 4(m + 3)(m - 4) > 0 \end{aligned}$$

これを満たす m の値の範囲は $m < -3, 4 < m \dots\dots ①$

また、2 つの解は正であるから、このグラフの軸は $x > 0$ の部分にあり、かつ、 $x = 0$ のときの y の値も正の数である。

よって $m > 0, m + 12 > 0$

これより $m > 0 \dots\dots ②$

① と ② の共通範囲を求めて

$$m > 4 \quad \text{答}$$

(2) 異なる 2 つの実数解をもつから、① より

$$m < -3, 4 < m$$

2 つの解が負であるから、このグラフの軸は $x < 0$ の部分にあり、かつ、 $x = 0$ のときの y の値は正の数である。

よって $m < 0, m + 12 > 0$

すなわち

$$-12 < m < 0 \dots\dots ③$$

① と ③ の共通範囲を求めて

$$-12 < m < -3 \quad \text{答}$$

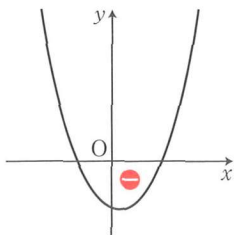
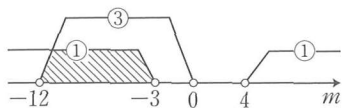
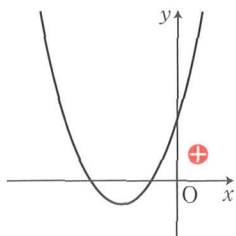
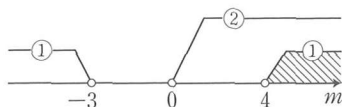
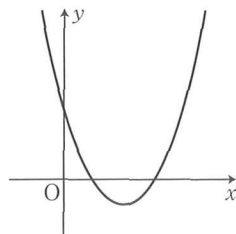
(3) 2 つの解が正の解と負の解であるとき、グラフは右の図のようになり、 $x = 0$ のときの y の値は負の数である。

よって $m + 12 < 0$

すなわち $m < -12$

逆に、このとき 2 次方程式は必ず正の解と負の解をもつ。

したがって $m < -12 \quad \text{答}$



3 章

2 次関数

